Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

**Войтович Л.В., Галанзовська М.Р.,
Серілко Л.С., Щурик В.О.**

ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 2

ДИНАМІКА

Навчальний посібник

Рівне 2018

УДК 531:531.2+531.3 (075)
П69

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
(Протокол № 10 від 27 грудня 2017 року)

Рецензенти:

Шваб'юк В. І., доктор технічних наук, професор кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету;

Налобіна О. О., доктор технічних наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування, м.Рівне;

Козяр М. М., доктор педагогічних наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування, м.Рівне.

Л. В. Войтович, М. Р. Галанзовська, Л. С. Серілко, В. О. Щурик
П69 Практикум з теоретичної механіки. Частина 2: Динаміка. Навчальний посібник. – Рівне : НУВГП, 2018. – 141 с.

ISBN 978-966-327-380-8

Навчальний посібник розроблено відповідно до робочої програми навчальної дисципліни "Теоретична механіка". Розглянуто основні теоретичні положення головного розділу механіки "Динаміка". Наведено приклади розв'язання типових задач, сформульовано питання для самопідготовки з основних тем динаміки.

Посібник орієнтований на вивчення зазначеного розділу теоретичної механіки студентами денної і заочної форм навчання.

Призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів III-IV рівнів акредитації спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт», 133 «Галузеве машинобудування», 192 «Будівництво та цивільна інженерія».

УДК 531:531.2+531.3 (075)

ISBN 978-966-327-380-8

ЗМІСТ

ВСТУП

Розвиток сучасної техніки ставить перед інженерами різноманітні завдання, які пов’язані з проектуванням, виробництвом, експлуатацією різних споруд, машин та механізмів. Розв’язання виникаючих при цьому технічних задач, ґрунтується на загальних принципах і має загальну наукову основу. Пояснюється це тим, що в таких задачах значне місце займають питання, які вимагають вивчення законів руху або рівноваги тіл.

Наука про загальні закони руху і рівноваги тіл називається теоретичною механікою. Відповідна навчальна дисципліна є одним із найважливіших курсів, які вивчаються у вищій технічній школі. Зараз до теоретичної механіки відносять порівняно вузький розділ механіки, а саме механіку матеріальної точки, механіку абсолютно твердого тіла та механічних систем.

Матеріальною точкою називають тіло, розмірами якого можна знехтувати в даній задачі. Абсолютно твердим називають таке тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюються. Сукупність матеріальних точок і тіл, рухи і положення яких взаємозв’язані, називають механічною системою.

У вищих технічних навчальних закладах теоретичну механіку поділяють на три розділи: *статику, кінематику, динаміку*.

В статиці вивчають методи перетворення одних систем сил в еквівалентні їм та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил.

Кінематика вивчає механічний рух з геометричної точки зору, без розгляду причин, які викликають або змінюють цей рух.

Динаміка вивчає механічний рух матеріальних тіл залежно від сил, що діють на них, тобто у взаємодії з іншими матеріальними тілами. Вона є заключним і основним розділом теоретичної механіки, оскільки рух в ній розглядається в комплексі – з урахуванням усіх чинників, які його породжують або ж впливають на нього. Для розв’язання типових задач цього розділу саме і призначений даний посібник.

Матеріал посібника викладено таким чином, що ним можна користуватись як при вивченні курсу по коротких, так і по більш повних програмах. Для студентів з короткою програмою вивчення дисципліни теми 2 та 10 є необов’язковими і можуть опрацьовуватись лише факультативно.

ДИНАМІКА

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчають загальні закони механічного руху матеріальних тіл під дією прикладених до них сил. Динаміка, що базується на законах Ньютона, називається класичною динамікою. Залежно від властивостей об’єкта динаміку поділяють на: динаміку матеріальної точки та динаміку системи матеріальних точок (механічної системи).

1. ЗАКОНИ НЬЮТОНА

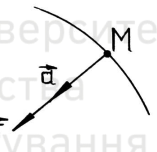
I закон Ньютона (закон інерції).

Ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою, або рухається рівномірно прямолінійно поки прикладені до неї сили не заставлять її змінити цей стан.

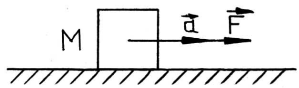
II закон Ньютона (основний закон динаміки):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування



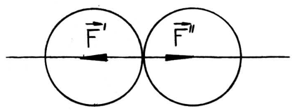
Прискорення, яке набуває матеріальна точка під дією $\vec{F}$, пропорційне величині сили, обернено пропорційне масі точки і має напрям сили:



$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{1.1}$$

III закон Ньютона.

Сили взаємодії між двома матеріальними точками рівні по величині і напрямлені по одній прямій в протилежні боки:



$$\vec{F}' = -\vec{F}''. \tag{1.2}$$

IV закон Ньютона.

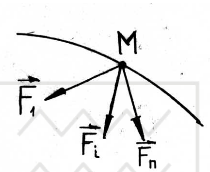
Прискорення, яке набуває матеріальна точка під дією системи сил дорівнює геометричній сумі прискорень, яких набувала б матеріальна точка під дією окремо кожної із сил:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n, \tag{1.3}$$

де $\vec{a}_1 = \dfrac{\vec{F}_i}{m}$, $\vec{a}_2 = \dfrac{\vec{F}_2}{m}$, ..., $\vec{a}_n = \dfrac{\vec{F}_n}{m}$.

1.1. Основне рівняння динаміки точки

На підставі II І IV законів можна записати основне рівняння динаміки точки, яке описує рух матеріальної точки під дією системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\}$:

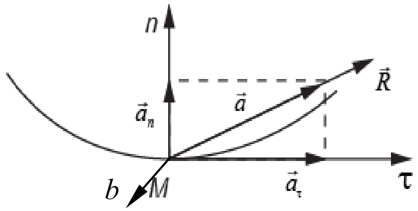


$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \, . \tag{1.4}$$

1. Основне рівняння динаміки точки в проекціях на осі декартової системи координат:

$$\begin{cases} ma_x = \sum F_{kx}, \\ ma_y = \sum F_{ky}, \\ ma_z = \sum F_{kz}. \end{cases} \tag{1.5}$$

2. Основне рівняння динаміки записане в проекціях на осі натуральної системи координат:



$$\begin{cases} ma_\tau = \sum F_{k\tau}, \\ ma_n = \sum F_{kn}, \\ 0 = \sum F_{kb}. \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки

Диференціальне рівняння руху точки в векторній формі:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\sum\vec{F}_k \text{ , або} \qquad (1.7)$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\sum\vec{F}_k \text{ .} \qquad (1.8)$$

Рух матеріальної точки в загальному випадку описується диференціальним рівнянням другого порядку.

Диференціальні рівняння матеріальної точки записані в проекціях на осі декартової системи координат:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kx}; \\ m\dfrac{dV_y}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{ky}; \\ m\dfrac{dV_z}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kz}; \end{cases} \qquad (1.9)$$

або

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kx}; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{ky}; \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kz}. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки, записані в проекціях на осі натуральної системи координат:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{k\tau}; \\ m\dfrac{V^2}{\rho}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kn}; \\ 0=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kb}. \end{cases} \qquad (1.11)$$

де $V = \dfrac{ds}{dt}$.

1.3. Пряма та обернена задачі динаміки

1. Пряма задача

Знаючи масу матеріальної точки та закон руху матеріальної точки, знайти сили, що діють на матеріальну точку.

2. Обернена задача динаміки

Знаючи масу матеріальної точки, сили, що діють на матеріальну точку та початкові умови (значення початкової швидкості та координат початкового положення), знайти закон руху матеріальної точки.

Обернена задача розв’язується шляхом інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки при певних початкових умовах.

В загальному випадку сили, що діють на матеріальну точку, можуть бути сталими, функціями часу, швидкості та координат, тому інтегрування даних рівнянь не завжди можливе. Для розв’язку складних задач застосовуються методи численного інтегрування диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}; \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}. \end{cases}$$

Розв’язок рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_{2,} C_{3,} C_{4,} C_{5,} C_6); \\ y = y(t, C_1, C_{2,} C_{3,} C_{4,} C_{5,} C_6); \\ z = z(t, C_1, C_{2,} C_{3,} C_{4,} C_{5,} C_6); \end{cases}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 – сталі інтегрування, які визначаються із початкових умов.

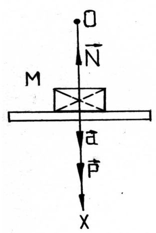
Початкові умови – це величини, які визначають початкове положення та швидкість точки. Наприклад, при $t = 0$:

$$\begin{cases} x = x_0, \quad V_x = V_{0x}; \\ y = y_0, \quad V_y = V_{0y}; \\ z = z_0, \quad V_z = V_{0z}. \end{cases}$$

1.4. Питання для самопідготовки

1. Як називається розділ механіки в якому вивчаються загальні закони механічного руху матеріальних тіл залежно від діючих на них сил?
2. Напишіть основне рівняння динаміки точки.
3. Як, знаючи вагу матеріальної точки, визначити її масу?
4. Яка розмірність сили в міжнародній системі одиниць (СІ)?
5. В яких одиницях вимірюється маса в міжнародній системі одиниць (СІ)?
6. Напишіть диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на осі декартової системи координат.
7. Напишіть диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на осі натуральної системи координат.
8. На матеріальну точку діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Кожна з цих сил окремо надає їй прискорення відповідно $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Чому рівне прискорення $\vec{a}$, що отримє точка від дії сукупності сил?
9. Якою задачею динаміки є задача визначення сили, що діє на точку, якщо рух точки і її маса відомі?
10. Якою задачею динаміки є задача визначення руху точки, якщо сили що діють на точку і її маса відомі?
11. З яких умов визначаються сталі інтегрування?
12. Під дією деякої сили величина швидкості точки масою *m* змінюється за законом: *V=at,* де *a=const, t* – час. Знайти силу, вважаючи рух точки прямолінійним.
13. Точка масою *m* рухається згідно рівняння $x = a\,const$ м, де *a = const, t* – час. Знайдіть величину сили прикладеної до точки сил.
14. Точка масою *m* рухається по колу радіусом *R* згідно з рівнянням: *s=at, м*, де *a = const, t* – час. Запишіть диференціальні рівняння руху точки в натуральній формі.

1.5. Порядок розв'язування прямої задачі динаміки точки



1. Зображаємо на рисунку матеріальну точку в поточний момент часу.

2. Напрямляємо активні сили, які діють на матеріальну точку.

3. У випадку невільної матеріальної точки напрямляємо реакції в'язей.

4. Вибираємо систему відліку.

5. Визначаємо проекції прискорення на вибрані осі координат.

6. Записуємо основне рівняння динаміки в проекціях на вибрані осі (1.5) або (1.6).

7. Визначивши алгебраїчну суму і підставивши суму проекцій сил на вибрані осі і підставивши суму проекцій сил в (1.5) або в (1.6), визначаємо невідомі.

1.6. Приклади розв'язування прямої задачі динаміки точки

<u>Задача 1.</u> Тягар вагою 100 *Н* піднімається згідно закону $y = 2.25t^2$*, м*. Визначити силу натягу канату, за допомогою якого піднімається тягар (рис. 1.1).

Розв'язання

Тягар виконує поступальний рух, тому його можна розглядати як матеріальну точку.

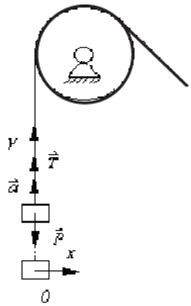


Рис. 1.1

Зображуємо тіло в довільний момент часу (рис. 1.1). напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Звільняємо тіло від в'язі і напрямляємо реакцію в'язі $\vec{T}$. Вибираємо систему координат. Записуємо основне рівняння динаміки в проекції на вісь *Oy* (тіло рухається вздовж осі *Oy*):

$$ma_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \qquad (1)$$

Визначимо проекцію прискорення на вісь *Oy*:

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = 4{,}9\ м/c^2 . \qquad (2)$$

Запишемо суму проекцій всіх сил, що діють на точку на вісь Oy:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = T - P . \qquad (3)$$

Підставивши (3) в (1) одержимо:

$$ma_y = T - P, \Rightarrow T = P + ma_y .$$

Враховуючи, що $m = \frac{P}{g}$, визначимо T:

$$T = P\left(1 + a_y/g\right) = 100 \cdot \left(1 + 4.9/9.8\right) = 150H .$$

Відповідь: $T = 150\ H$.

<u>Задача 2.</u> У відцентровому тахометрі кулька вагою $9{,}8\ H$ розміщена на кінці невагомого стержня AB, шарнірно закріпленого на вертикальній осі BC, що обертається (рис. 1.2). Кулька утримується ниткою ALD, кінець якої D закріплений в трубці LD.

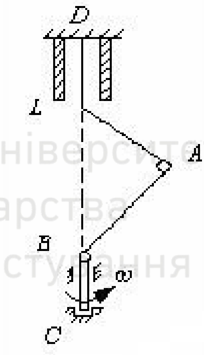


Рис. 1.2

Визначити силу натягу нитки, а також зусилля в стержні AB, якщо кутова швидкість тахометра рівна 2 c^{-1} і $AB =$ $=CB = LB = 1$ $м$.

Розв'язання

Розглянемо рух кульки A, приймаючи її за матеріальну точку. Зображаємо кульку A в поточний момент часу (рис. 1.3).

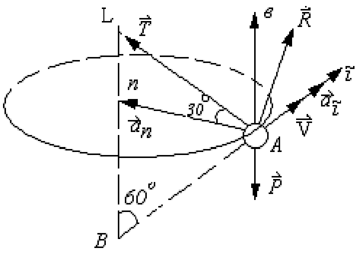


Рис. 1.3

Напрямляємо активну силу $\vec{P}$, яка діє на кульку. Умовно відки-даємо в'язі і замінюємо їх дію на кульку реакціями в'язей: $\vec{R}$ і $\vec{T}$.

Вибираємо систему відліку – напрямну систему координат з початком в точці A. Складаємо диференціальні рівняння руху кульки A в проекції на натуральні осі.

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{k\tau}, \\ m\dfrac{V^2}{r} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kn}, \\ 0 = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kb}, \end{cases}$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{k\tau} = 0$; $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kn} = T\cos 30° - R\cos 30°$;

$\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kb} = T\sin 30° + R\sin 30° - P$;

$V = \omega \cdot AL\sin 60° = const$; $r = AL\sin 60°$.

Отже $\dfrac{dV}{dt} = 0$; і рівняння матимуть вигляд:

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ \dfrac{P}{g} \cdot \dfrac{(\omega AL)^2 \sin 60°}{AL \cdot \sin 60^0} = T\cos 30° - R\cos 30°, \\ 0 = T\sin 30° + R\sin 30° - P. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язавши систему рівнянь (1), визначимо T і R:

$$T = P/\sin 30° - R,$$

$$\frac{P}{g}\omega^2 AL\sin 60° = P\text{ctg}30° - 2R\cos 30°;$$

$$R = \frac{\mathrm{ctg}30^\circ - \left(\omega^2/g\right)AL\sin 60^\circ}{2\cos 30^\circ}P = \frac{2\sqrt{3} - \left(2^2/9{,}8\right)\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\cdot 9{,}8 = 7{,}8\left(H\right);$$

$$T = 9{,}8/0{,}5 - 7{,}8 = 11{,}8\left(H\right).$$

Відповідь: R=7,8 H, T=11,8 H.

1.7. Порядок розв’язування оберненої задачі динаміки точки

Пункти 1-4 – див. порядок розв’язання прямої задачі динаміки точки.

5. Записуємо початкові умови руху матеріальної точки.
6. Складаємо диференціальні рівняння руху точки в проекціях на осі вибраної системи координат. Всі змінні сили при цьому слід виразити через величини, від яких ці сили залежать.
7. Інтегруємо диференціальні рівняння; із початкових умов визначаємо сталі інтегрування. У випадку, коли сила залежить від координат рухомої точки x, y, z робимо заміну змінних:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dV_x}{dt} = V_x\cdot\dfrac{dV_x}{dx}; \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dV_y}{dt} = V_y\cdot\dfrac{dV_y}{dy}; \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dV_z}{dt} = V_z\cdot\dfrac{dV_z}{dz}. \end{cases}$$

8. З отриманих в результаті інтегрування рівнянь знаходимо шукані величини.

1.8. Приклади розв’язування оберненої задачі динаміки точки

1. Задачі, в яких сили, що діють на матеріальну точку, сталі.

<u>Задача 3.</u> По похилій шорсткій площині, що складає кут 30° з горизонтом, рухається тіло масою m (рис. 1.4).

Визначити закон руху тіла, якщо початкова швидкість $V_0 = 10$ *м/с*, а коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}1$.

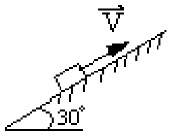


Рис. 1.4

Розв'язання

Розглядаємо рух тіла, приймаючи його за матеріальну точку. Зобразимо точку в поточний момент часу (рис. 1.5). Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо складові реакції в'язі: силу тертя $\vec{F}_{mp}$ і нормальну реакцію $\vec{N}$. Вибираємо систему координат $x0y$ з початком в початковому положенні тіла. Записуємо початкові умови руху точки:

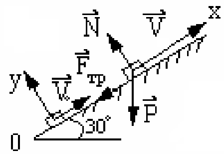


Рис. 1.5

при $t = 0: x_0 = 0, y_0 = 0, V_x = V_0, V_y = 0$.

Складаємо диференціальні рівняння руху точки в проекціях на вибрані осі:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}; \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}. \end{cases}$$

Оскільки: $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = -P\sin 30° - F_{mp}$,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N - P\cos 30°, \frac{dV_y}{dt} = 0, \quad m = \frac{P}{g},$$

то рівняння матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{P}{g} \cdot \dfrac{dV_x}{dt} = -P\sin 30° - F_{mp}, \\ 0 = N - P\cos 30°. \end{cases}$$

Звідки: $N = P\cos 30°$.

Відомо, що $F_{mp} = f\,N = f\,P\cos 30°$.

Отже $$\frac{P}{g}\cdot\frac{dV_x}{dt}=-P\sin 30^\circ - fP\cos 30^\circ,$$

$$\frac{dV_x}{dt}=-g\left(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ\right). \qquad (1)$$

Проінтегруємо диференціальне рівняння руху точки (1).

Розділюємо змінні і інтегруємо:

$$\int dV_x = -g\left(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ\right)\int dt,$$

$$V_x = -g\left(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ\right)\cdot t + C_1. \qquad (2)$$

Підставимо початкові умови і визначимо C_1:

$$V_0 = C_1.$$

Підставимо значення сталої інтегрування в (2) і одержимо закон зміни швидкості:

$$V_x = -g\left(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ\right)t + V_0.$$

З кінематики відомо, що: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$.

Тоді $$\frac{dx}{dt} = -g\left(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ\right)\cdot t + V_0.$$

Розділюємо змінні і інтегруємо:

$$\int dx = -\int\left[g\left(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ\right)\cdot t - V_0\right]dt;$$

$$x = -g\left(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ\right)\cdot\frac{t^2}{2} + V_0\cdot t + C_2. \qquad (3)$$

Підставивши початкові умови в (3), визначимо C_2:

$$0 = C_2.$$

Підставляємо значення C_2 в (3) і отримаємо закон руху точки:

$$x = -9{,}8\left(0{,}5 + 0{,}1\cdot 0{,}866\right)\cdot\frac{t^2}{2} + 10t = \left(-0{,}92434t^2 + 10t\right)\text{ м}.$$

Відповідь: $x = \left(-0{,}92434t^2 + 10t\right)$ *м*.

2. Задачі, в яких сили, які діють на матеріальну точку, залежать від часу.

Задача 4. Судно водотоннажністю P рухається прямим курсом з початковою швидкістю V_0.

При збільшенні швидкості рушійна сила гвинтів Q пропорційна часу, тобто $Q = kt$, де $k = const$, *а сила опору води* $T = \text{const}$. Визначити шлях S, який пройде судно за час $t = t_1$, якщо за цей час його швидкість збільшилась в два рази.

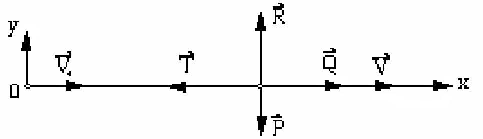


Рис. 1.6

Розв'язання

Розглянемо рух судна, приймаючи його за матеріальну точку. Зобразимо точку в поточний момент часу (рис. 1.6).

Напрямляємо активні сили, які діють на точку $\vec{P}$ – сила тяжіння і $\vec{Q}$ – рушійна сила гвинтів.

Напрямляємо реакції в'язей:

$\vec{R}$ – виштовхувальна (Архімедова) сила;

$\vec{T}$ – сила опору.

Вибираємо систему координат xOy з початком, в початковому положенні точки. Записуємо початкові умови:

$$\text{при} \quad t = 0: \; x = x_0 = 0; \; V_x = V_0 .$$

Складаємо диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь Ox:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \, .$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = Q - T = (kt - T)$ і $m = \dfrac{P}{g}$,

то диференціальне рівняння матиме вигляд: $\dfrac{P}{g}\cdot\dfrac{dV_x}{dt} = kt - \dfrac{Tg}{P} \Rightarrow$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{kg}{P}\cdot t - \frac{Tg}{P} .$$

Проінтегруємо два рази диференціальне рівняння руху точки:

$$\int dV_x = \int\left(\frac{kg}{P}\cdot t - \frac{Tg}{P}\right)dt\ ;$$

$$V_x = \frac{kg}{P}\cdot\frac{t^2}{2} - \frac{Tg}{P}\cdot t + C_1\,.$$

Визначимо з початкових умов C_1 :

$$V_0 = C_1\ .$$

Закон зміни швидкості матиме вигляд:

$$V_x = \frac{kg}{P}\cdot\frac{t^2}{2} - \frac{Tg}{P}\cdot t + V_0\,. \qquad (1)$$

З кінематики відомо, що: $V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dS}{dt}$;

Тоді $$\frac{dS}{dt} = \frac{kg}{P}\cdot\frac{t^2}{2} - \frac{Tg}{P}\cdot t + V_0\,.$$

Розділюємо змінні і знову інтегруємо:

$$\int dS = \int\left(\frac{kg}{P}\cdot\frac{t^2}{2} - \frac{Tg}{P}\cdot t + V_0\right)dt;$$

$$S = \frac{kg}{P}\cdot\frac{t^3}{6} - \frac{Tg}{P}\cdot\frac{t^2}{2} + V_0\cdot t + C_2\,.$$

Визначимо з початкових умов C_2 :

$$0 = C_2\,.$$

Отже закон руху матиме вигляд:

$$S = \frac{kg}{P}\cdot\frac{t^3}{6} - \frac{Tg}{P}\cdot\frac{t^2}{2} + V_0\cdot t\ . \qquad (2)$$

З умови задачі відомо, що

$$V_{x|t=t_1} = V_1 = 2V_0\,. \qquad (3)$$

Підставивши (2) в (1), визначимо *K*:

$$2V_0 = \frac{kg}{P}\cdot\frac{t_1^2}{2} - \frac{Tg}{P}\cdot t_1 + V_0\,;$$

$$k = 2\frac{V_0 + \frac{Tg}{P}\cdot t_1}{gt_1^2}\cdot P = 2\frac{PV_0 + Tgt_1}{gt_1^2}.$$

Підставивши значення *K* в (2), визначимо *S*:

$$S = \frac{g}{3P}\cdot\frac{PV_0 + Tgt_1}{gt_1^2}\cdot t_1^3 - \frac{Tg}{2P}\cdot t_1^2 + V_0 t_1 = \frac{PV_0 + Tgt_1}{3P}\cdot t_1 - \frac{Tg}{2P}\cdot t_1^2 + V_0\cdot t_1 =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot V_0\cdot t_1 - \frac{Tg}{6P}\cdot t_1^2.$$

Відповідь: $S = \frac{4}{3}V_0\cdot t_1 - \frac{Tg}{6P}\cdot t_1^2$.

3. Сила, що діє на матеріальну точку, залежить від віддалі.

<u>Задача 5.</u> Матеріальна точка масою m, що мала початкову швидкість $V_0 = \sqrt{2}$ *м/с*, рухається по горизонтальній площині вздовж осі *Ox*. Визначити закон руху точки, якщо сила опору

$$R = \frac{km}{(x+k)^2},$$

де k = const.

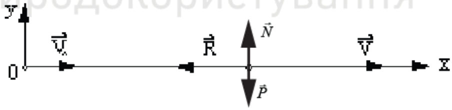


Рис. 1.7

Розв'язання

Зображаємо точку в поточний момент часу (рис. 1.7). На точку діють сили $\vec{P}$ та $\vec{N}$.

Напрямляємо силу опору $\vec{R}$. Вибираємо систему координат.

Початкові умови: при $t = 0$: $x = 0$; $V_x = V_0$.

Складаємо диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь *Ox*:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -R = -\frac{km}{(x+k)^2}$, то $\frac{dV_x}{dt} = -\frac{k}{(x+k)^2}$.

Заміна змінних:

$$\frac{dV_x}{dt} = V_x \cdot \frac{dV_x}{dx} \; .$$

Отже $V_x \cdot \dfrac{dV_x}{dx} = -\dfrac{k}{(x+k)^2}$.

Розділюємо змінні і проінтегруємо:

$$\int V_x \cdot \frac{dV_x}{dx} = -\int \frac{k}{(x+k)^2} \; ;$$

$$\frac{V_x^2}{2} = \frac{k}{x+k} + C_1 \; .$$

Визначимо з початкових умов C_1 :

$$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{k}{0+k} + C_1 \; ; \quad C_1 = 0.$$

$$V_x = \sqrt{\frac{2k}{x+k}} \; .$$

З кінематики відомо: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$.

Отже $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{\dfrac{2k}{x+k}}$.

Розділюємо змінні і проінтегруємо:

$$\int \left(\frac{x+k}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\left(\frac{x+k}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} = t + C_2 \, .$$

Визначимо з початкових умов C_2 :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{0+k}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} = 0 + C_2 \; ; \; C_2 = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \; .$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x+k}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} = t + \frac{1}{3\sqrt{2}} \; ; \; \left(\frac{x+k}{2k}\right)^3 = \left[\frac{1}{2}\left(3t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2 \; ;$$

$$\frac{x+k}{2k}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(3t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\;;\; x=k\left[2\sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(3t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}-1\right].$$

Відповідь: $x=k\left[2\sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(3t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}-1\right].$

4. Сила, що діє на матеріальну точку, залежить від швидкості.

<u>Задача 6.</u> Підводний човен, що не рухається, отримав невелику від'ємну плавучість P і опускається на глибину, рухаючись поступально. Опір води при невеликій від'ємній плавучості можна прийняти пропорційним швидкості опускання і рівним kAV, де k=const, A – площа горизонтальної проекції човна, V – швидкість опускання. Визначити швидкість опускання $V(t)$, якщо при t=0, V_0=0 і M – маса човна.

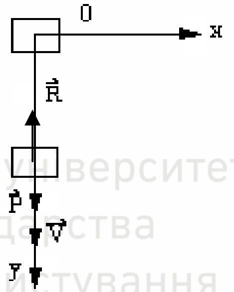


Рис. 1.8

Розв'язання

Розглянемо рух човна, прийнявши його за матеріальну точку. Зображаємо човен в поточний момент часу (рис. 1.8).

Напрямляємо активну силу $\vec{P}$ – плавучість човна. Напрямляємо реакцію в'язі $\vec{R}$ – силу опору води руху човна. Вибираємо систему координат: початок розміщуємо в початковий момент руху човна. Вісь Oy напрямляємо вздовж траєкторії руху човна.

Початкові умови руху човна:

$$\text{при } t=0;\; y=y_0=0;\; V_y=V_{Oy}=0\,.$$

Складаємо диференціальне рівняння руху човна:

$$M\frac{dV_y}{dt}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\,.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{n} F_y = P - R = P - kAV_y \text{, то } M\frac{dV_y}{dt} = P - kAV_y .$$

Отже $\dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{P - kAV_y}{M}$.

Розділюємо змінні і інтегруємо:

$$\int \frac{dV_y}{P - kAV_y} = \int \frac{dt}{M}; \quad -\frac{1}{kA}\cdot \ln\left(P - kAV_y\right) = \frac{t}{M} + C_1 .$$

C_1 визначимо з початкових умов:

$$-\frac{1}{kA}\cdot \ln P = 0 + C_1; \qquad C_1 = -\frac{\ln P}{kA}.$$

Тоді

$$-\frac{1}{kA}\cdot \ln\left(P - kAV_y\right) = \frac{t}{M} - \frac{\ln P}{kA}. \tag{1}$$

З рівняння (1) визначимо V_y:

$$\frac{1}{kA}\cdot \ln\frac{P}{P - kAV_y} = \frac{t}{M}; \qquad V_y = \frac{P}{kA}\left[1 - e^{-\frac{kA}{P}\cdot t}\right].$$

Відповідь: $V_y = \dfrac{P}{kA}\left[1 - e^{-\frac{kA}{P}\cdot t}\right]$.

5. Приклад розв'язання оберненої задачі динаміки точки в випадку криволінійного руху точки.

<u>Задача 7.</u> Літак летить на висоті *H* над землею з горизонтальною швидкістю 900 *км/год*. Визначити закон руху тягаря, скинутого з літака без початкової швидкості, якщо сила опору повітря рухові тягаря пропорційна швидкості тягаря і рівна: $\vec{F} = -0{,}2m\vec{V}$, де *m* – маса тягаря.

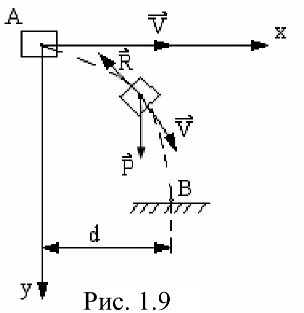


Рис. 1.9

Розв'язання

Розглянемо рух тягаря, приймаючи його за матеріальну точку. Зображаємо тягар в поточний момент часу (рис. 1.9).

Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо силу опору повітря $\vec{R}$, яка діє на вантаж.

Вибираємо систему координат.

Записуємо початкові умови руху тягаря:

$$t_0 = 0: \begin{cases} x_0 = 0;\ V_{0x} = 900 км/год = 25\ м/с; \\ y_0 = 0;\ V_{0y} = 0. \end{cases}$$

Складаємо диференціальні рівняння руху в проекціях на вибрані осі:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};\ m\frac{dV_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -R_x = -0{,}2mV_x;$

$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = P - R_y = mg - 0{,}2mV_y$, то

$$\frac{dV_x}{dt} = -0{,}2V_x; \quad \frac{dV_y}{dt} = 0{,}2(5g - V_y). \qquad (1)$$

Проінтегруємо диференціальні рівняння (1):

$\int \frac{dV_x}{V_x} = -0{,}2\int dt;\ \ \ln V_x = -0{,}2t + C_1;$

$\int \frac{dV_y}{5g - V_y} = 0{,}2\int dt;\ -\ln(5g - V_y) = -0{,}2t + C_2.$

Визначимо C_1 і C_2 з початкових умов:

$$C_1 = \ln 25;\ C_2 = -\ln 5g.$$

Отже $\begin{cases} \ln V_x = -0{,}2t + \ln 25; \\ -\ln(5g - V_y) = 0{,}2t - \ln 5g \end{cases}$ $\begin{cases} V_x = 25e^{-0{,}2t}; \\ V_y = 5g(1 - e^{-0{,}2t}). \end{cases}$

Оскільки $V_x = \dfrac{dx}{dt}$ і $V_y = \dfrac{dy}{dt}$, то

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 25e^{-0,2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5g\left(1 - e^{-0,2t}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Проінтегруємо диференціальні рівняння (б):

$$\int dx = 25\int e^{-0,2t}dt; \qquad \begin{cases} x = -125e^{-0,2t} + C_3; \\ y = 5g\left(t + 5e^{-0,2t}\right) + C_4. \end{cases}$$
$$\int dy = 5g\int\left(1 - e^{-0,2t}\right)dt.$$

З початкових умов визначимо C_3 і C_4:

$$\begin{cases} 0 = -125e^{0} + C_3; \\ 0 = 5g\left(0 + 5e^{0}\right) + C_4 \end{cases}. \qquad \begin{cases} C_3 = 125; \\ C_4 = -25g. \end{cases}$$

Отже $\begin{cases} x = 125\left(-e^{-0,2t} + 1\right), \ м, \\ y = 5g\left(t + 5e^{-0,2t} - 5\right), \ м. \end{cases}$

Відповідь:

закон руху тягаря: $\begin{cases} x = 125\left(1 - e^{-0,2t}\right), \ м; \\ y = 5g\left[t + 5\left(e^{-0,2t} - 1\right)\right], \ м. \end{cases}$

2. КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1. Вільні коливання матеріальної точки

Вільними (власними) називаються коливання матеріальної точки, які відбуваються під дією поновлюючої сили.

Поновлюючою називається сила, яка намагається повернути точку в положення рівноваги і пропорційна відхиленню цієї точки від положення статичної рівноваги.

1. При русі матеріальної точки M масою m по горизонтальній осі (рис. 2.1) під дією поновлюючої сили $\vec{F}$, яка рівна по модулю $F = c|x|$, диференціальне рівняння руху точки має вигляд:

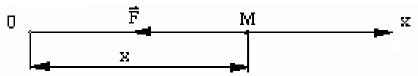


Рис. 2.1

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2.1)$$

де $k^2 = \dfrac{c}{m}$,

c – коефіцієнт пружності пружини, який чисельно рівний силі, яку потрібно прикласти до пружини, щоб змінити її на одиницю довжини.

2. Матеріальна точка M масою m підвішена до нижнього кінця

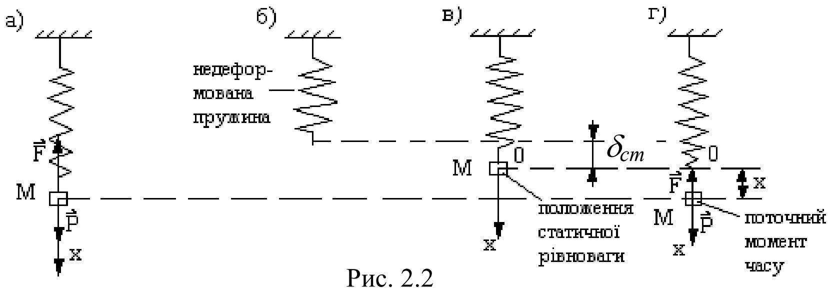


Рис. 2.2

пружини (рис. 2.2).

В положенні (г) рис. 2.2 поновлююча сила $\vec{F}$ рівна по модулю: $F = c(x + \delta_{cm})$, а сила $\vec{P}$ по модулю рівна $P = c \cdot \delta_{cm}$.

Диференціальне рівняння вільних коливань має вигляд: $\ddot{x}+k^2x=0$, де $k^2=\dfrac{c}{m}$.

При початкових умовах: при $t = 0$: $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$.

Закон вільних коливань має вигляд: $x=a\sin(kt+\alpha)$, (2.3)

де A – амплітуда коливань – найбільше відхилення точки від положення рівноваги:

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}\,; \tag{2.4}$$

$(kt+\alpha)$ – фаза коливань, α – початкова фаза коливань, яка визначається за формулою: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{kx_0}{\dot{x}_0}$, (2.5)

k – кругова частота коливань – число коливань матеріальної точки за 2π секунд:

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}}\,. \tag{2.6}$$

Періодом коливань T матеріальної точки називається найменший проміжок часу, протягом якого здійснюється одне повне коливання:

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}}\,. \tag{2.7}$$

2.2. Затухаючі коливання

При русі матеріальної точки в середовищі, яке чинить опір рухові точки (повітря, рідина), виникає сила опору рухові матеріальної точки, яка пропорційна швидкості точки: $R=\beta V$, де β – сталий коефіцієнт; при великих швидкостях – пропорційна квадрату швидкості точки:

$R=\beta_1 V^2$, де β_1 – сталий коефіцієнт.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки в випадку затухаючих коливань має вигляд:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0\,, \tag{2.8}$$

де $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $2n = \dfrac{\beta}{m}$.

Якщо $n < k$ – випадок малого опору, $n > k$ – випадок великого опору, $n = k$ – граничний випадок.

1. Якщо $n < k$, то $x = A \cdot e^{-nt} \cdot \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \alpha\right)$.

Якщо $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то:

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}, \\ tg\alpha = \dfrac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0}. \end{cases} \qquad 2.9)$$

Кругова частота і період коливання визначаються за формулами:

$$\begin{cases} k_c = \sqrt{k^2 - n^2}, \\ T_c = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \end{cases} \qquad (2.10)$$

2. Якщо n > k, то матеріальна точка здійснює неперіодичний рух згідно закону:

$$x = e^{-nt} \cdot \left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t}\right). \qquad (2.11)$$

3. Якщо $n = k$, то матеріальна точка здійснює затухаючі неперіодичні коливання:

$$x = e^{-nt} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot t\right). \qquad (2.12)$$

2.3. Вимушені коливання

Вимушеними називаються коливання, які відбуваються під дією періодичної збурної сили, прикладеної до точки, яка являється функцією від часу.

Диференціальне рівняння вимушених коливань, які відбуваються під дією збурної сили $S = H\sin(pt + \delta)$, має вигляд:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta), \text{ де } k^2 = \frac{c}{m},\ h = \frac{H}{m}. \qquad (2.13)$$

Закон руху матеріальної точки в випадку р ≠ к визначається за формулою: $x = x_1 + x_2$, де x_1 – загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння; x_2 – частковий розв’язок неоднорідного рівняння.

Отже
$$\begin{cases} x_1 = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt, \\ x_2 = \dfrac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin(pt + \delta). \end{cases}$$

Значить $$x = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin(pt + \delta). \quad (2.14)$$

При початкових умовах, тобто при $t = 0$: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ сталі інтегрування визначаються за формулами:

$$\begin{cases} c_1 = x_0 - \dfrac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin \delta, \\ c_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{k} - \dfrac{ph}{k(k^2 - p^2)} \cdot \cos \delta. \end{cases} \quad (2.15)$$

2.4. Питання для самопідготовки

1. Як називаються коливання, які здійснюються під дією тільки відновлювальної сили?
2. Чи залежить період вільних коливань матеріальної точки від початкових умов руху?
3. По якій формулі знаходиться амплітуда вільних коливань матеріальної точки?
4. Як знаходиться циклічна (кругова) частота вільних коливань?
5. Яка розмірність коефіцієнта жорсткості пружини?
6. Напишіть диференціальні рівняння вільних коливань матеріальної точки.
7. Чи є сила пружності відновлювальною силою?
8. По якій формулі знаходиться період коливань матеріальної точки?
9. Що називається фазою вільних коливань матеріальної точки?
10. Чи залежить циклічна (кругова) частота вільних коливань матеріальної точки від початкових умов руху?
11. Напишіть закон гармонійних коливань матеріальної точки.

12. Як називаються величина рівна найбільшому відхиленню від центра коливання?

13. Чи збільшиться період вільних коливань при збільшені маси точки?

14. В яку сторону зміщує постійно сила центр коливань, якщо коливання точки відбуваються під дією відновлювальної сили?

15. Чи залежить амплітуда вільних коливань матеріальної точки від початкових умов руху?

16. Який вид графіку вільних коливань?

17. Чи змінює постійна сила характер коливань, якщо коливання точки відбувається під дією відновлювальної сили?

18. Вантаж вагою P підвішений на пружині з коефіцієнтом жорсткості C. Визначити статичне видовження пружини.

19. Яка розмірність циклічної (кругової) частоти вільних коливань матеріальної точки?

20. Чи залежить початкова фаза вільних коливань матеріальної точки від початкових умов руху?

21. На яку величину зміщує постійна сила центр коливань, що здійснюються точкою під дією відновлювальної сили?

22. Як називається проміжок часу, під час якого точка здійснює одне повне коливання?

23. За якою формулою визначається циклічна (кругова) частота вільних коливань матеріальної точки?

24. Статичне видовження пружини, на якій підвішений вантаж вагою P, рівне $f_{ст}$. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини.

25. Яка розмірність періоду вільних коливань матеріальної точки?

2.5. Порядок розв’язування задач

1. Виділяємо матеріальну точку і зображуємо її в даний момент часу.

2. Напрямляємо активні сили, які діють на розглядувану матеріальну точку.

3. Звільняємо матеріальну точку від в’язей і замінюємо їх дію реакціями в’язей.

4. Записуємо початкові умови руху точки, виходячи з умови задачі.

5. Складемо диференціальне рівняння коливного руху матеріальної точки.

6. Інтегруємо диференціальне рівняння і визначаємо шукані величини.

2.6. Приклади розв'язування задач

Задача 8. На гладенькій площині, нахиленій під кутом 30° до горизонту, знаходиться тягарець вагою P = 9,8 H (рис. 2.3), які закріпленні до пружини, жорсткість, якої C = 100 $H/см$. Визначити рівняння руху тягарця, якщо він опускається без початкової швидкості із положення, при якому пружина не була деформована.

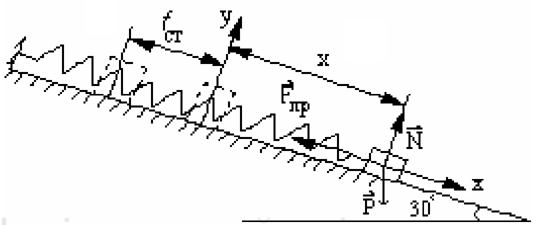


Рис. 2.3

Розв'язання

Зображаємо тягарець в поточний момент часу.

Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{N}$, $\vec{F}_{пр}$.

Сила пружності пружини: $F_{пр} = c\,f$, де f – повне видовження пружини, яке рівне $f = f_{ст} + x$.

Отже $F_{пр} = c\left(f_{ст} + x\right)$.

Вибираємо систему координат: початок координат співпадає з положенням статичної рівноваги тягарця, вісь OX напрямляємо в бік руху тягарця.

Початкові умови: при $t = 0$: $x_0 = -f_{ст}$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

Складаємо диференціальне рівняння руху:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}.$$

Враховуючи, що $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -F_{np} + P\sin 30°$, одержимо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(f_{cm} + x\right) + m\,g\sin 30°. \qquad (1)$$

В положенні статичної рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0\,,\quad P\sin 30° - F_{cm} = 0;\; m\,g\sin 30° - c\,f_{cm} = 0.$$

Отже $$c\,f_{cm} = m\,g\,\sin 30°. \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1), одержимо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx;\quad \textit{або}\quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\cdot x = 0\,.$$

Оскільки: $k^2 = \frac{c}{m}$, то:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (3)$$

Розв'язок рівняння (в) має вигляд:

$$x = c_1\cos kt + c_2\sin kt\,.$$

Визначимо сталі інтегрування з початкових умов, попередньо знайшовши $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\dot{x} = -c_1\,k\sin kt + c_2\,k\cos kt\,.$

Тоді: $$\begin{cases} -f_{cm} = c_1\cos 0 + c_2\sin 0\;; \\ 0 = -c_1 k\sin 0 + c_2 k\cos 0\;. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, визначимо c_1 і c_2 :

$$c_2 = 0\,;\qquad c_1 = -f_{cm} = -\frac{P\sin 30°}{c} = -\frac{9{,}8\cdot 5}{100} = -0{,}049\ (\textit{см}).$$

Закон руху тягарця матиме вигляд:

$$x = -0{,}049\cos kt = -0{,}049\cos\sqrt{\frac{c\cdot g}{P}}\cdot t = -0{,}049\cos\sqrt{\frac{100\cdot 980}{9{,}8}}\cdot t =$$
$$= -0{,}049\cos 100t\ (см).$$

Відповідь: $x = -0{,}049\cos 100t\ см.$

<u>Задача 9.</u> Тягарець вагою P = 98 H прикріплений до пружини, коефіцієнт жорсткості якої c = 10 $H/см$, і опущений в рідину (рис. 2.4). При русі тягаря в рідині виникає сила опору рухові, яка пропорційна швидкості тягаря: $R = \beta V$, де $\beta = 1{,}6\ \ H\cdot c/\text{см}$. Визначити закон руху тягарця, якщо в початковий момент часу тягарець був зміщений від положення статичної рівноваги вниз на 4 см і йому була надана початкова швидкість V_0 = 4 $см/с$.

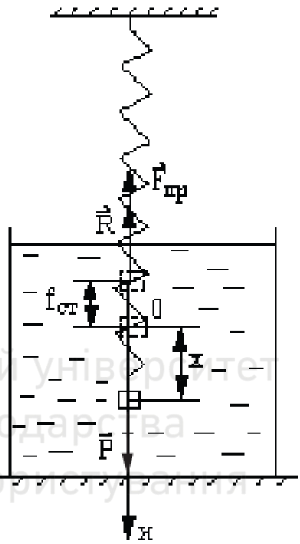


Рис. 2.4

Розв'язання

Зображаємо тягарець в поточний момент часу. Напрямляємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{R}$, $\vec{F}_{пр}$ (рис. 2.4).

Сила пружності $F_{пр} = c\,f$, де f – повне видовження пружини, яке рівне $f = f_{ст} + x$.

Отже $F_{пр} = c\left(f_{ст} + x\right)$.

Вибираємо систему координат: початок координат співпадає з положенням статичної рівноваги тягарця, вісь Ox напрямляємо в бік руху тягарця.

Початкові умови: при t = 0: $x = x_0 = 4см,\ \dot{x} = \dot{x}_0 = 4см/с.$

Складаємо диференціальне рівняння руху тягарця: $m\,\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$.

Враховуючи, що:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = P - F_{np} - R = mg - c\left(f_{cm} + x\right) - 1{,}6\dot{x} \quad \text{та} \quad P = mg = c\, f_{cm} \,,$$

одержимо $m\,\ddot{x} = c\, f_{cm} - c\, f_{cm} - c\,x - 1{,}6\,\dot{x} = -c\,x - 1{,}6\,\dot{x}$. Отже:

$$m\,\ddot{x} + 1{,}6\,\dot{x} + c\,x = 0 \;,$$

$$\ddot{x} + \frac{1{,}6}{m}\,\dot{x} + \frac{c}{m}\,x = 0 \;.$$

Позначимо
$$\begin{cases} 2n = \dfrac{1{,}6}{m} = \dfrac{1{,}6 \cdot g}{P} = \dfrac{1{,}6 \cdot 980}{98} = 16 \;, \\ k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{c \cdot g}{P} = \dfrac{10 \cdot 980}{98} = 100 \;\;\;\;. \end{cases}$$

Тоді
$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \,, \qquad (1)$$

де $2n = 16$; $k^2 = 100$.

Запишемо характеристичне рівняння диференціального рівняння (1):

$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, звідки

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2} \,.$$

Рівняння руху тягарця має вигляд:

$$x = e^{-nt}\left(c_1 \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + c_2 \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)\right). \qquad (2)$$

Щоб визначити з початкових умов c_1 і c_2 , потрібно знайти $\dot{x}$:

$$\dot{x} = e^{-nt}\left(-c_1\sqrt{k^2 - n^2}\sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + c_2\sqrt{k^2 - n^2}\cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)\right) - \\ - ne^{-nt}\left(c_1 \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + c_2 \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)\right). \qquad (3)$$

Підставимо в (2) і (3) початкові умови і, врахувавши, що: $n = 8;\;\; \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$, одержимо:

$$\begin{cases} 4 = c_1 \cos(8 \cdot 0) \;; \\ 4 = e^0\left(-c_1 \cdot 8\sin 8 \cdot 0 + c_2 \cdot 8\cos 8 \cdot 0\right) - 8e^0\left(c_1 \cos 8 \cdot 0 + c_2 \sin 8 \cdot 0\right). \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, матимемо: $\begin{cases} c_1 = 4 \;; \\ c_2 = 4{,}5 \;. \end{cases}$

Закон руху тягарця: $x = e^{-8t}\left(4\cos 6t + 4{,}5\sin 6t\right)$, *см.*

Відповідь: $x = e^{-8t}\left(4\cos 6t + 4{,}5\sin 6t\right)$, *см.*

Задача 10. Тягарець вагою 100 *Н* підвішений до пружини (рис. 2.5), коефіцієнт жорсткості якої c = = 20 *Н/см*, починає коливатися із стану спокою під дією сили $F = H\sin pt$, де H = 27,6 *Н*, $p = 10c^{-1}$, $P = 10c^{-1}$. В початковий момент часу тягарець знаходився в положенні статичної рівноваги. Визначити закон руху тягарця.

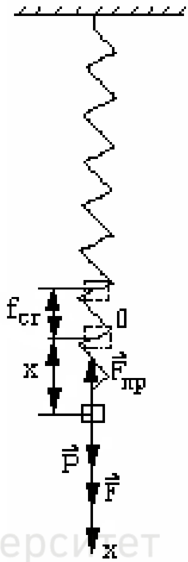


Рис. 2.5

Розв’язання

Зображаємо тягарець в проміжний момент часу (рис. 2.5). Напрямляємо сили, які діють на тягарець: $\vec P, \vec F, \vec F_{пр}$. Вибираємо систему координат, помістивши початок координат в положенні статичної рівноваги. Вісь *Ох* напрямляємо вниз. Складаємо диференціальне рівняння руху тягарця:

$$m \cdot \ddot x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F + P - F_{пр} = H\sin pt + c \cdot f_{ст} - c\left(f_{ст} + x\right).$$

Тоді $m\ddot x = -cx + H\sin pt$.

Поділивши праву і ліву частини на m, одержимо:

$$\ddot x = -\frac{c}{m}x + \frac{H}{m}\sin pt.$$

Позначивши $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $h = \dfrac{H}{m} = \dfrac{H \cdot g}{P}$, одержимо:

$$\ddot x + k^2 x = h\sin pt. \tag{1}$$

Загальний розв’язок рівняння (1): $x = x_1 + x_2$, де

x_1 – загальний розв’язок однорідного рівняння: $\ddot x + k^2 = 0$;

x_2 – частковий розв’язок диференціального рівняння (1).

Відповідно: $x_1 = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$.

Частковий розв’язок шукаємо у вигляді:

$$x_2 = A\sin pt. \tag{2}$$

Підставивши (2) в (1), визначимо A:

$$-Ap^2 \sin pt + k^2 \cdot A \sin pt = h \sin pt .$$

Отже $A = \dfrac{h}{k^2 - p^2}$.

Тоді розв'язок диференціального рівняння (1) матиме вигляд:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt . \qquad (3)$$

Визначимо c_1 і c_2 з початкових умов:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 0, \ \dot{x} = \dot{x}_0 = 0 .$$

$$\dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \cos pt . \qquad (4)$$

Підставимо початкові умови в (3) і (4):

$$\begin{cases} 0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + \dfrac{h}{k^2 - p^2} \sin 0 \ ; \\ 0 = -c_1 k \sin 0 + c_2 k \cos 0 + \dfrac{h}{k^2 - p^2} \cos 0 \ . \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, визначимо c_1 і c_2:

$$c_1 = 0 , \qquad c_2 = -\frac{h \cdot p}{k\left(k^2 - p^2\right)} .$$

Отже $x = \left(-\dfrac{h \cdot p}{k\left(k^2 - p^2\right)} \cdot \sin kt + \dfrac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt \right)$, *см*.

Підставивши числові значення:

$$k = \sqrt{\frac{c \cdot g}{p}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 980}{100}} = \sqrt{196} = 14c^{-1} , \quad \text{p} = 10c^{-1},$$

$$h = \frac{H \cdot g}{Q} = \frac{27{,}6 \cdot 980}{100} = 270{,}48 , \qquad k^2 - p^2 = 196 - 100 = 96 ,$$

одержимо

$$x = -\frac{270{,}48 \cdot 10}{14 \cdot 96} \sin 14t + \frac{270{,}48}{96} \sin 10t = \left(-2{,}0125 \sin 14t + 2{,}8175 \sin 10t \right) \text{ см}$$

Відповідь: $x = \left(-2{,}0125 \sin 14t + 2{,}8175 \sin 10t \right)$, *см.*

3. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

3.1. Центр мас механічної системи

Центром мас механічної системи називається геометрична точка, в якій зосереджена вся маса системи і положення якої визначають за формулами:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}; \tag{3.1}$$

або $$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \; y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \; z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

У випадку, коли відомі координати центрів мас окремих частин системи:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_{Ck}}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \; y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_{Ck}}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \; z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_{Ck}}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{3.2}$$

3.2. Теорема про рух центра мас механічної системи

Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, в якій зосереджена маса механічної системи, під дією сили рівної головному вектору зовнішніх сил:

$$M \cdot \vec{a}_c = \vec{R}^e, \tag{3.3}$$

де $\vec{R}^e = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e$ – головний вектор зовнішніх сил,

$\vec{a}_c$ – прискорення центра мас,

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \;\; \text{– маса системи.} \qquad (3.4)$$

Зовнішніми силами механічної системи називаються сили, з якими діють тіла, які не входять в склад механічної системи на механічну систему.

Внутрішніми силами механічної системи називаються сили взаємодії між точками механічної системи.

Властивості внутрішніх сил:

Головний вектор $\vec{R}^i$ і головний момент $\vec{M}_O^i$ внутрішніх сил механічної системи дорівнюють нулю :

$$\begin{cases} \vec{R}^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0; \\ \vec{M}_O^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^i\right) = 0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

3.2.1. Наслідки із теореми про рух центра мас механічної системи

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил механічної системи дорівнює нулю, то центр мас механічної системи рухається прямолінійно і рівномірно, або перебуває в стані спокою.

2. Якщо алгебраїчна сума проекцій зовнішніх сил, які діють на механічну систему на якусь із координатних осей дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас на цю вісь стала:

Якщо $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, то $V_{Cx} = const$.

Якщо $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$ і $V_{cx}\big|_{t=0} = 0$, то $x_C = const$.

3.3. Питання для самопідготовки

1. За якими формулами визначають координати центра мас системи?

2. Як виражається теорема про рух центра мас системи (векторна форма)?

3. Чи можна, користуючись теоремою про рух центра мас, визначити головний вектор діючих на систему зовнішніх сил за заданим законом руху центра мас?

4. Чи можна, користуючись теоремою про рух центра мас, визначити закон руху центра мас системи за заданими зовнішніми силами?

5. Які сили, діючі на систему, безпосередньо не впливають на рух її центра мас?

6. При вибуху бомби її частини летять в різних напрямках. Чи буде їх загальний центр мас продовжувати попередній рух?

7. Система: Сонце-Земля. Чи може змінити дію взаємного притягання між Сонцем і Землею положення центра мас цієї системи?

8. Завдяки якій зовнішній силі автомобіль рухається по горизонтальному шляху?

9. В якому випадку центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно?

10. Сонячну систему можна рахувати ізольованою, якщо нехтувати дією зірок. Як повинен рухатись центр мас цієї системи?

11. В якому випадку центр мас системи знаходиться в стані спокою?

12. Яку дію на вільне тіло здійснює прикладена до нього пара сил?

13. В якому випадку проекція швидкості центра мас системи на яку-небудь координатну вісь є сталою.

14. В якому випадку деяка координата центра мас залишається сталою?

3.4. Порядок розв’язування задач

1. Зображуємо механічну систему в поточний момент часу.
2. Показуємо на рисунку зовнішні сили, які діють на механічну систему.
3. Вибираємо нерухому систему координат і показуємо координати центрів мас точок, що входять в склад механічної системи.
4. Записуємо теорему про рух центра мас механічної системи в проекціях на осі вибраної системи координат.

5. В залежності від умови задачі, розв'язуємо пряму або обернену задачі динаміки.

3.5. Приклади розв'язування задач

Задача 1. Однорідний стержень AB довжиною $2l$ опирається на гладеньку площину (рис. 3.1) і займає вертикальне положення. Стержень, відхилившись від вертикального положення, падає. Визначити траєкторію руху центра ваги стержня, а також точки B стержня при падінні.

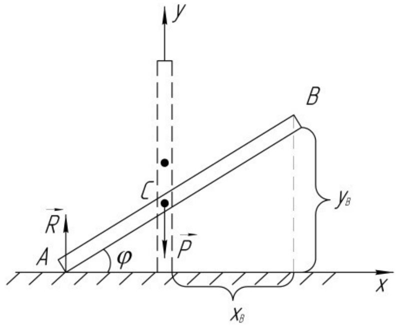


Рис. 3.1

Розв'язання

Зображаємо стержень в даний момент часу. Направляємо зовнішні сили, які діють на стержень: $\vec{P}$ і $\vec{R}$.

Вибираємо систему координат xOy.

Запишемо теорему про рух центра мас стержня в проекції на xO:

$$Ma_{Cx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}\text{, оскільки } \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \text{ і } M \neq 0\text{, то } a_{Cx} = 0.$$

Тоді $a_{Cx} = \dfrac{dV_{Cx}}{dt} = 0$. Проінтегрувавши, одержимо:

$$V_{Cx} = C_1. \tag{1}$$

Оскільки $V_{Cx} = \dfrac{dx_C}{dt} = C_1$, то

$$x_C = C_1 t + C_2. \tag{2}$$

Визначимо сталі інтегрування C_1 і C_2 з початкових умов: при $t = 0$: початкова координата x центра ваги стержня: $x_c = 0$ і проекція початкової швидкості на вісь x: $\dot{x}_c = 0$.

Підставимо початкові умови в (1) і (2), визначаємо C_1, C_2: $C_1 = 0$, C_1=0, C_2=0.

Отже $V_{cx} = 0$; $x_c = 0$.

Якщо координата x точки C не змінюється і рівна нулю, то точка C рухається по вертикалі вздовж осі Oy. Тобто траєкторія точки C є пряма лінія. Визначимо координати точки B:

$$x_B = l\cos\varphi, \;\; Y_B = 2\,l\sin\varphi.$$

Виключивши з цих рівнянь $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$, одержимо траєкторію точки B :

$$\frac{x_B^2}{l^2} + \frac{y_B^2}{4l^2} = 1\,.$$

Точка В при русі описує еліпс з центром в початку координат і півосями l і $2l$;

Відповідь: $\begin{cases} x_C = 0, \\ \dfrac{x_B^2}{l^2} + \dfrac{y_B^2}{4l^2} = 1. \end{cases}$

<u>Задача 2.</u>

Людина вагою P сидить посередині човна вагою Q, який знаходиться в стані спокою в стоячій воді.

Визначити, нехтуючи опором води, на яку віддаль перемістилася людина, якщо човен перемістився при цьому на віддаль S_1.

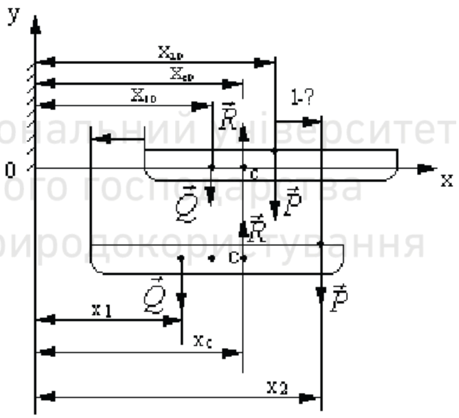


Рис. 3.2

Розв'язання

Механічна система складається з човна і людини. Зображуємо два положення механічної системи: початкове і кінцеве. Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему. Вибираємо нерухому систему координат xOy. Записуємо теорему про рух центра мас механічної системи в проекціях на Ox:

$$Ma_{Cx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}\,.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0$ і $M \neq 0$, то $a_{Cx} = 0$, або $a_{Cx} = \frac{dV_{Cx}}{dt} = 0$.

Звідки $V_{Cx} = C_1$, а при $t = 0 \quad V_{Cx} = 0$.

Отже $C_1 = 0$. Тоді $V_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = 0$, звідки $x_c = C_2$.

При $t = 0$: $x_{c/t=0} = x_{co}$; а отже $C_2 = x_{co}$.

Остаточно $$x_{C_0} = x_C. \quad (1)$$

Визначимо x_{Co}: $$x_{Co} = \frac{Q\, x_{1o} + P\, x_{2o}}{Q + P}. \quad (2)$$

Враховуючи, що $x_1 = x_{1o} - S_1$; $x_2 = x_{2o} - S_1 + 1$, визначимо x_c:

$$x_C = \frac{Qx_1 + Px_2}{Q + P} = \frac{Q(x_{1o} - S_1) + P(x_{2o} - S_1 + l)}{Q + P}. \quad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1). Оскільки в (2) і (3) знаменники рівні, то виходячи з рівності (1), прирівняємо їх чисельники:

$$Qx_{1o} + Px_{2o} = Q(x_{1o} - S_1) + P(x_{2o} - S_1 + l).$$

Розв'язавши рівняння, визначимо l:

$$l = \frac{(P + Q)S_1}{P}.$$

Відповідь: Людина повинна зміститися вправо на віддаль

$$l = \frac{(P + Q)}{P} \cdot S_1.$$

<u>Задача 3.</u> Визначити силу тиску на ґрунт насоса для відкачки води (рис. 3.3) при його роботі в холосту, якщо вага корпуса *D* і фундаменту *E* рівна P_1, вага кривошипа рівна P_2, вага куліси В і поршня *F* рівна P_3. Кривошип *OA* довжиною *l*, який обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω, вважати однорідним стержнем.

Розв'язання

Зображаємо насос, який складається з кривошипа *OA*, куліси і поршня, корпуса *D* і фундаменту *E*.

Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему: $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{R}$ ($\vec{N} = -\vec{R}$).

Вибираємо нерухому систему координат xOy.

Запишемо теорему про рух центра мас механічної системи в проекції на Oy:

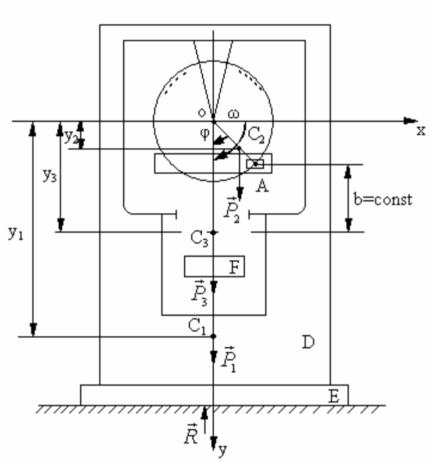


Рис. 3.3

$$Ma_{Cy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^{e}. \tag{1}$$

Визначимо масу всієї системи:

$$M = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g}. \tag{2}$$

Визначимо y_c:

$$y_c = \frac{\frac{P_1}{g} y_1 + \frac{P_2}{g} y_2 + \frac{P_3}{g} y_3}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{P_3}{g}} = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

$$\begin{cases} y_1 = const; \\ y_2 = \frac{l}{2}\cos\omega t; \\ y_3 = l\cos\omega t + b. \end{cases} \tag{3}$$

Враховуючи (3), визначимо y_c:

$$y_c = \frac{P_1 y_1 + P_2 \frac{l}{2}\cos\omega t + P_3 (l\cos\omega t + b)}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Визначимо a_{cy} : $a_{cy} = \dfrac{d^2 y_c}{dt^2}$:

$$a_{cy} = \frac{-P_2 \frac{l}{2}\omega^2 \cos\omega t - P_3 l\,\omega^2 \cos\omega t}{P_1 + P_2 + P_3} = -\frac{l\omega^2}{2}\cdot\frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3}\cdot\cos\omega t. \qquad (4)$$

Визначимо суму проекцій зовнішніх сил системи на вісь Oy :

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k\,y}^{e} = R - P_1 - P_2 - P_3. \qquad (5)$$

Підставимо вирази в (2), (4), (5) в (1) :

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{g}\cdot\left(-\frac{l\omega^2}{2}\frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3}\cdot\cos\omega\cdot t\right) = R - P_1 - P_2 - P_3 .$$

З даного рівняння визначимо R:

$$R = \left[P_1 + P_2 + P_3 - \frac{l\omega^2}{2g}\left(P_2 + 2P_3\right)\cdot\cos\omega\cdot t\right].$$

Відповідь: $N = R = \left[P_1 + P_2 + P_3 - \dfrac{l\omega^2}{2g}\left(P_2 + 2P_3\right)\cdot\cos\omega\cdot t\right].$

Задача 4. На горизонтальній платформі (рис. 3.4) встановлена похила дошка під кутом 60° до горизонту. По цій гладенькій дошці за допомогою лебідки піднімається тягар масою m_1=40 *кг,* який рухається по закону $S_1 = 0.8\,t^2$, *м* .

В початковий момент часу система знаходилась в стані спокою.

Яку швидкість матиме платформа в момент часу t_1=5 *с*, якщо маса платформи з дошкою і лебідкою m_2=*160 кг* і на платформу діє горизонтальна сила: F=20(t-10,52), H; опором руху платформи знехтувати .

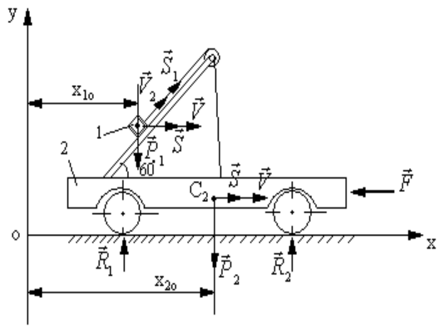


Рис. 3.4

Розв'язання. Механічна система складається з платформи з дошкою і лебідкою і тягаря.

Покажемо зовнішні сили, які

діють на механічну систему.

Вибираємо нерухому систему відліку xOy.

Запишемо теорему про рух центра мас механічної системи в проекції на Ox у вигляді диференціального рівняння :

$$M \cdot \frac{dV_{Cx}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}.$$

Визначимо масу механічної системи:

$$M = m_1 + m_2 = 40 + 160 = 200\ (кг)\,. \qquad (2)$$

Визначимо $V_{cx} = \dfrac{dx_c}{dt}$, де x_c :

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{40\left(x_{1_0} + S_1 \cos 60^\circ + S\right) + 160\left(x_{2_0} + S\right)}{200} =$$

$$= \left(0{,}2x_{1_0} + 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8t^2 + 0{,}6x_{2_0} + S\right),\ \ м.$$

Враховуючи, що $x_{10} = const$; $x_{20} = const$, одержимо:

$$V_{cx} = 0{,}16t^2 + \frac{dS}{dt} = \left(0{,}16t^2 = V\right)\ м/с\,.$$

Отже $$V_{cx} = \left(0{,}16t^2 + V\right),\ \ м/с. \qquad (3)$$

Визначимо $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}$:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k\,x}^{e} = -F = -20\left(t - 10{,}52\right),\ \ H\,. \qquad (4)$$

Підставимо (2), (3), (4) в (1):

$$200 \cdot \frac{d}{dt}\left(0{,}16t^2 + V\right) = -20\left(t - 10{,}52\right);$$

Національний університет водного господарства та природокористування

$$200 \cdot 0{,}16 \cdot 2t + \frac{dV}{dt} = -20t + 210{,}4\,;$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(-84t + 210{,}4\right).$$

Розділимо змінні і про інтегруємо; враховуючи що швидкість змінюється від $V_0 = 0$ $V_1 = V$, а час від $t = 0$ до $\tau = 5c$:

$$\int_0^V dV = \int_0^5 \left(-84 \cdot t + 210{,}4\right) \cdot dt;$$

$$V = \left(-84\frac{t^2}{2} + 210{,}4 \cdot t\right)\Bigg|_0^5 = -42 \cdot 25 + 210{,}4 \cdot 5 = 2(м/c)\,.$$

Відповідь: $V = 2\, м/c$.

4. ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

4.1. Імпульс сили. Кількість руху матеріальної точки. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Елементарним імпульсом сили $\vec{F}$ за нескінченно малий проміжок часу dt називається вектор $d\vec{S}$, що дорівнює добутку сили $\vec{F}$ на елементарний проміжок часу її дії:

$$d\,\vec{S} = \vec{F} \cdot dt. \tag{4.1}$$

Повний імпульс сили $\vec{F}$ обчислюється за формулою:

$$\vec{S} = \int_o^t \vec{F} \cdot dt\,. \tag{4.2}$$

Імпульс рівнодійної сили дорівнює геометричній сумі імпульсів складових сил: $\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_k$, де (4.3)

$$\vec{S}_k = \int_0^t \vec{F}_k dt\,.$$

Кількістю руху матеріальної точки називається вектор, рівний добутку маси матеріальної точки на швидкості точки:

$$m\vec{V}\,. \tag{4.4}$$

Напрямок вектора кількості руху $m\vec{V}$ співпадає із напрямком швидкості (рис. 4.1).

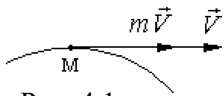


Рис. 4.1

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній векторній формі:

похідна по часу від кількості руху матеріальної точки геометрично рівна рівнодійній всіх сил, які діють на матеріальну точку:

$$\frac{d\left(m\vec{V}\right)}{d\,t}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\ . \qquad (4.5)$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній векторній формі:

Зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів всіх сил, які діють на матеріальну точку, за цей же проміжок часу:

$$m\vec{V}-m\vec{V}_0=\sum_{k=1}^{n}\vec{S}_k\ , \qquad (4.6)$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{S}_k=\int\limits_0^t\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot dt$.

4.2. Кількість руху механічної системи. Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Кількістю руху механічної системи називається вектор $\vec{K}$, який дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх матеріальних точок, механічної системи:

$$\vec{K}=\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{V}_k\ . \qquad (4.7)$$

Кількість руху механічної системи можна визначити через масу механічної системи M та швидкість її центра мас $\vec{V}_c$.

Кількість руху механічної системи дорівнює добутку маси механічної системи на швидкість центра мас механічної системи:

$$\vec{K}=M\,\vec{V}_c\ . \qquad (4.8)$$

Теорема про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній векторній формі:

похідна по часу від кількості руху механічної системи геометрично рівна головному вектору всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему:

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,e}\ . \qquad (4.9)$$

Теорема про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній формі: зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему за цей же проміжок часу:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e \ , \tag{4.10}$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e = \int\limits_{o}^{t} \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \cdot dt$.

4.3. Питання для самопідготовки

1. Що називається кількістю руху матеріальної точки?

2. Яка розмірність кількості руху в міжнародній системі одиниць (СІ)?

3. Як знаходиться модуль кількості руху, якщо відомі його проекції на осі координат?

4. Як знаходиться напрямок кількості руху, якщо відомі його модуль і проекції на осі координат?

5. Чи змінюється кількість руху точки, яка рухається по колу рівномірно?

6. Як знаходиться імпульс $\overline{S}$ сталої сили за кінцевий проміжок часу?

7. Яка розмірність імпульсу сили в міжнародній системі одиниць (СІ)?

8. Векторною чи скалярною величиною є імпульс сили?

9. Як знаходиться напрямок імпульсу сили, якщо відомі його модуль і проекції на осі координат?

10. Що називається кількістю руху механічної системи?

11. Як виражається кількість руху системи через швидкість руху її центра мас?

12. Чому рівна кількість руху маховика, який обертається навколо нерухомої осі. що проходить через його центр мас?

13. Як виражається теорема про зміну кількості руху матеріальної точки, в дифернціальній формі векторним рівнянням?

14. Як виражається теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі рівняннями в проекціях на осі координат?

15. Як виражається теорема про зміну кількості, руху матеріальної точки в інтегральній формі векторним рівнянням?

16. Як виражається теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в кінцевій формі рівняннями в проекціях на осі координат?

17. Як виражається теорема про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі векторним рівнянням?

18. Як виражається теорема про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі рівняннями і проекціях на осі координат?

19. Як виражається теорема про зміну кількості руху механічної системи в кінцевій (інтегральній) формі векторним рівнянням?

20. Чи можуть внутрішні сили змінити загальну кількість руху системи?

21. В якому випадку кількість руху механічної системи залишається сталою?

22. В якому випадку проекція кількості руху механічної системи на деяку координатну вісь залишається сталою?

4.4. Порядок розв’язування задач

1. Зображуємо точку або механічну систему в даний момент часу.
2. Показуємо активні сили, які діють на точку або механічну систему.
3. Звільняємо точку від в’язей або механічну систему від зовнішніх в’язей і замінюємо їх дію реакціями в’язей.
4. Вибираємо систему координат.
5. Записуємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки або механічної системи в проекції на осі вибраної системи координат.
6. Розв’язуємо складені рівняння і знаходимо шукані величини.

4.5. Приклади розв’язування задач

Задача 1. Тіло масою m піднімається по шорсткій поверхні (рис. 4.2), нахиленій під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту, під дією сили $F = 2m(t+1)$, H. Визначити швидкість тіла в момент часу $t_1 = 2$ c, якщо початкова швидкість $V_0 = 6 \ ^{м}/_{с}$ і коефіцієнт тертя, ковзання f=0,1.

Розв'язання

Розглянемо рух тіла, прийнявши його за матеріальну точку. Зображуємо матеріальну точку в поточний момент часу (рис. 4.2).

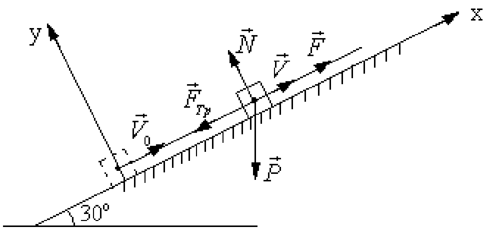


Рис. 4.2

Напрямляємо активні сили $\vec{P}$ *і* $\vec{F}$.

Напрямляємо складові реакції в'язі $\vec{N}$ *і* $\vec{F}_{Тр.}$.

Відомо, що $F_{Тр.} = f\ N$. Оскільки матеріальна точка рухається вздовж осі Ox, то $a_y = 0$, а отже :

$\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0.$ Тоді : $N - P\cos 30° = 0$.

Визначаємо

N і $F_{Тр}$: $N = P\cos 30°$ і $F_{Тр} = f\ P\cos 30° = f\ mg\cos 30°$.

Записуємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в кінцевій (інтегральній) формі в проекції на Ox:

$$mV - mV_0 = \sum_{k=1}^{n} S_{kx} \quad , \text{ де} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} S_{kx} = \int_0^2 \sum_{k=1}^{n} F_{kx} dt = \int_0^2 \left(F - P\sin 30^\circ - F_{Tp}\right) dt =$$

$$= \int_0^2 \left(2mt + 2m - mg\sin 30^\circ - f\, mg\cos 30^\circ\right) dt =$$

$$= m\left(t^2 + 2t - gt\sin 30^\circ - f\, gt\cos 30^\circ\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2m\left(2 + 2 - 9{,}8\cdot\left(0{,}5 + 0{,}1\cdot\sqrt{3}/2\right)\right) \approx -3{,}5\, m\left(H\cdot c\right).$$

Отже $$\sum_{k=1}^{n} S_{kx} = -3{,}5m \quad (H\cdot c)\ . \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1), визначимо швидкість руху тіла :

$$mV - mV_0 = -3{,}5m\ ,$$

$$V = V_0 - 3{,}5 = 6 - 3{,}5 = 2{,}5(\,м/с).$$

Відповідь: V=2,5 $м/с$.

<u>Задача 2.</u> Визначити проекції кількості руху на осі Ox і yO кривошипно-повзункового механізму (рис. 4.3), якщо кривошип довжиною l і масою m обертається з кутовою швидкістю ω. Маса шатуна довжиною l рівна $2m$. маса повзуна $3m$. кривошип і шатун вважати однорідними стержнями.

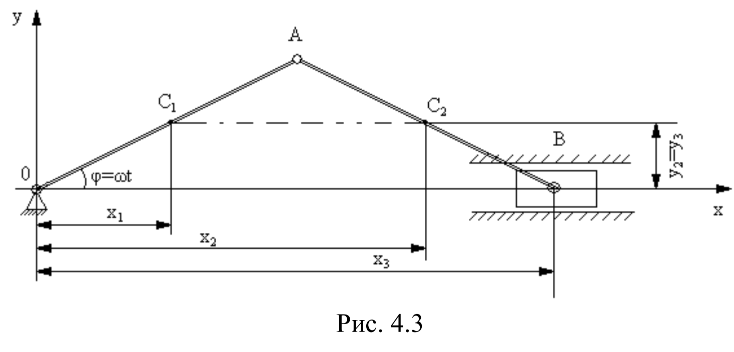


Рис. 4.3

Розв'язання

Координати центрів мас кривошипа, шатуна і повзуна:

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\omega t; \qquad x_2 = \left(l + \frac{l}{2}\right)\cos\omega t; \qquad x_3 = 2l\cos\omega t;$$

$$y_1 = \frac{l}{2}\sin\omega t; \qquad y = 0; \qquad y_2 = \frac{l}{2}\sin\omega t.$$

Проекції кількостей руху механічної системи визначаємо за формулами:

$$\begin{cases} K_x = MV_{Cx} = M\dfrac{dx_C}{dt}; \\ K_y = MV_{Cy} = M\dfrac{dy_C}{dt}. \end{cases}$$

Визначимо координати центра ваги механізму x_c і y_c:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m\frac{l}{2}\cos\omega\cdot t + 2m\left(l + \frac{l}{2}\right)\cos\omega\cdot t + 3m\cdot 2l\cos\omega\cdot t}{m + 2m + 3m} =$$

$$= \frac{9{,}5}{6} l\cos\omega\, t \;;$$

$$y_c = \frac{m_1y_1 = m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m\frac{l}{2}\sin\omega\, t + 2m\frac{l}{2}\sin\omega\, t + 3m\cdot 0}{6m} = \frac{1{,}5}{6} l\sin\omega\, t.$$

Тоді: $\dfrac{dx_c}{dt} = \dfrac{9{,}5}{6} l\omega^{\;2}\cos\omega t$; $\dfrac{dy_c}{dt} = \dfrac{1{,}5}{6} l\omega^{\;2}\sin\omega t\cdot$

Оскільки $M = m_1 + m_2 + m_3 = 6m$, то:

$$K_x = -6m\cdot\frac{9{,}5}{6} l\omega^{\;2}\cos\omega\, t = -9{,}5\, ml\omega^2\cos\omega\, t,$$

$$K_y = -6m\cdot\frac{1{,}5}{6} l\omega^{\;2}\sin\omega\, t = -1{,}5\, ml\omega^2\sin\omega\, t.$$

Відповідь:
$$\begin{cases} K_x = -9{,}5{,}m\,l\,\omega^2\cos\omega t; \\ K_y = -1{,}5m\,l\,\omega^2\sin\omega t. \end{cases}$$

Задача 3. Пароплав вагою P=600 *кН* набрав швидкості 1.5 $^{м}/_{с}$, після чого натягнувся канат і баржа вагою Q=400 *кН* рушила за пароплавом. Визначити загальну швидкість пароплава і баржі, враховуючи, що сила опору води $\vec{R}$ і рушійна сила $\vec{F}$ зрівноважені (рис. 4.4).

Розв'язання

Зображуємо механічну систему, яка складається з пароплава і баржі в даний момент часу. Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему (рис. 4.4). Вибираємо систему координат.

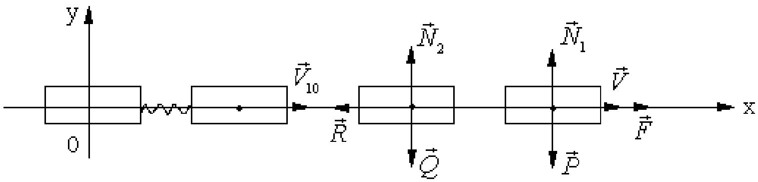


Рис. 4.4

Записуємо теорему про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі в проекції на Ox:

$\dfrac{dK_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}$, оскільки : $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0$, то $\dfrac{dK_x}{dt} = 0$. Отже K_x = const.

Відповідно: $K_{ox} = K_x$;

$$K_{ox}^{n} + K_{ox}^{б} = K_{x}^{n} + K_{x}^{б} \ ; \quad V_0^{б} = 0 \ , \ V_0^{n} = V_{1_0} \ ; \ V^{б} = V ; \ V^{n} = V .$$

Тоді: $$\frac{P}{g} V_{1_0} + 0 = \frac{P}{g} V + \frac{Q}{g} V .$$

$$V = \frac{P V_{1_0}}{P + Q} = \frac{600 \cdot 1{,}5}{600 = 400} = 0{,}9 \ \left({}^{м}/{}_{с}\right).$$

Відповідь: $V = 0{,}9 \ м/с$.

<u>**Задача 4.**</u> Вода вливається в нерухомий канал змінного перерізу, симетричний відносно вертикальної площини, з швидкістю $V_0 = 2$ *м/с* під кутом α=90° до горизонту (рис. 4.5). Площа перерізу каналу при вливанні води A=0,01 $м^2$; вода витікає з каналу з швидкістю V=4 *м/с*, при чому швидкість $\vec{V}$ напрямлена під кутом

30° до горизонту. Визначити горизонтальну складову реакції води на стінки каналу.

Розв'язання

Оскільки кількість води, що вливається в канал і витікає з нього за один і той же час, стала, то:

$$dK_x = MV\cos\alpha = \frac{AV_0 dt}{g} V\cos\alpha \ . \qquad (1)$$

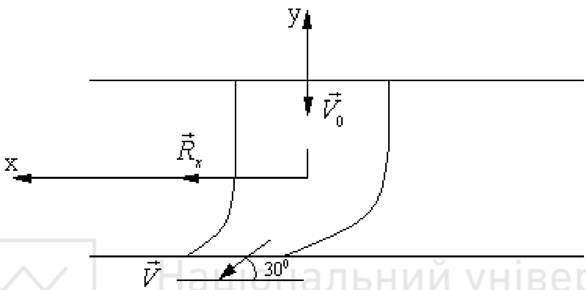


Рис. 4.5

Запишемо теорему про зміну кількості руху в диференціальній формі в проекції на x:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} \ . \qquad (2)$$

Оскільки
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = R_x \ , \qquad (3)$$

то підставивши (1) і (3) в (1), одержимо:

$$\frac{AV_0\gamma}{g} V\cos\alpha = R_x \ .$$

Підставивши задані величини, матимемо:

$$R_x = \frac{0{,}02\cdot 2\cdot 10000}{9{,}8}\cdot 4\cos 30^\circ = 141{,}4\,(H).$$

Відповідь: $R_x = 141{,}4\ H$.

5. ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

5.1. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра та осі

Моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра *O* називається вектор $\vec{l}_0$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора матеріальної точки на вектор кількості руху (рис. 5.1):

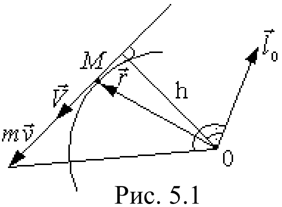


Рис. 5.1

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{V}. \tag{5.1}$$

Моментом кількості руху матеріальної точки відносно осі *Oz* називається скалярна величина $l_{Z,}$ яка дорівнює моментові проекції кількості руху матеріальної точки на площину перпендикулярну до осі *Oz* відносно точки перетину осі і площини (рис. 5.2):

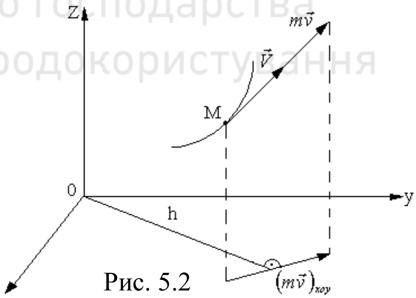


Рис. 5.2

$$l_z = \left(m\vec{V}\right)_{xOy} h\,. \tag{5.2}$$

Похідна по часу від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра *O* дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил, які діють на матеріальну точку, відносно центра *O*:

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_0\left(\vec{F}_k\right). \tag{5.3}$$

Похідна по часу від моменту кількості руху матеріальної точки відносно якої-небудь нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил, які діють на матеріальну точку, відносно цієї ж осі:

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_k\right). \tag{5.4}$$

5.2. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомого центра та осі

Кінетичним моментом механічної системи відносно нерухомого центра „О” називається вектор $\vec{L}_0$, який дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху матеріальних точок, які входять в склад механічної системи, відносно нерухомого центра „О”:

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{l}_{0k} . \tag{5.5}$$

Кінетичним моментом механічної системи відносно будь-якої нерухомої осі називається скалярна величина, яка дорівнює алгебраїчній сумі моментів кількостей руху матеріальних точок, які входять в склад механічної системи, відносно тієї ж осі:

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} l_{zk} . \tag{5.6}$$

Похідна від часу від кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомого центра „О” дорівнює геометричній сумі моментів всіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, відносно центра „О”:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^{\,e}\right). \tag{5.7}$$

Похідна по часу від кінетичного моменту механічної системи відносно якої-небудь нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, відносно цієї ж осі:

$$\frac{dL_z}{dt}=\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right). \tag{5.8}$$

5.3. Диференціальне рівняння обертального руху абсолютно твердого тіла

Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі, то кінетичний момент тіла відносно неї визначається за формулою:

$$L_Z = I_Z \cdot \omega\,, \tag{5.9}$$

де I_Z – момент інерції тіла відносно осі обертання (міра інертності тіла при обертальному русі).

Підставивши (5.9) в (5.8), одержимо диференціальне рівняння обертального руху абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$I_z\frac{d\omega}{dt}=\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_k^{e}\right). \tag{5.10}$$

5.4. Моменти інерції деяких однорідних тіл

Моментом інерції тіла відносно осі Oz називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків мас точок тіла на квадрати їх віддалей до осі Oz:

$$I_z=\sum_{k=1}^{n} m_k\, r_k^2\,. \tag{5.11}$$

Часто для визначення момента інерції використовують радіус інерції тіла. Радіусом інерції називається віддаль від осі Oz, на яку потрібно перенести масу тіла, щоб момент інерції тіла не змінився:

$$I_z = M\, i_z^2\,, \tag{5.12}$$

де M – маса тіла, i_z – радіус інерції тіла.

Момент інерції тіла відносно осі Oz дорівнює моментові інерції цього тіла відносно осі z_C , яка проходить через центр мас і паралельна осі Oz, доданому до добутку маси тіла на квадрат віддалі між осями (рис. 5.3):

$$I_Z = I_{Z_C} + M\, d^2\,. \tag{5.13}$$

Моменти інерції деяких однорідних тіл:

1. Тонкий однорідний стержень довжиною l і масою m (рис. 5.4):

$$I_Z = \frac{m\,l^2}{3}, \quad I_{Zc} = \frac{m\,l^2}{12}. \tag{5.14}$$

2. Круглий однорідний диск масою m і радіусом r (рис. 5.5):

$$I_z = \frac{m\,r^2}{2}, \quad I_x = I_y = \frac{m\,r^2}{4}. \tag{5.15}$$

3. Тонке кругле однорідне кільце масою m і радіусом r (рис. 5.6):

$$I_z = m\,r^2, \quad I_x = I_y = \frac{m\,r^2}{2}. \tag{5.16}$$

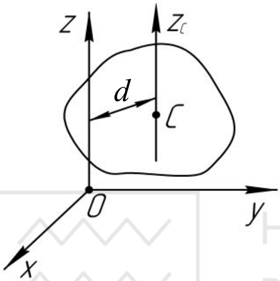


Рис. 5.3

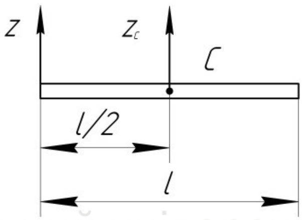


Рис. 5.4

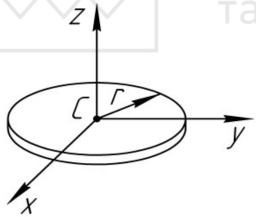


Рис. 5.5

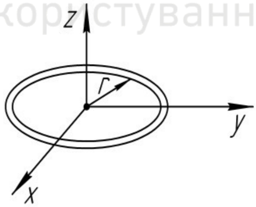


Рис. 5.6

5.5. Питання для самопідготовки

1. Записати формулу для визначення моменту кількості руху точки відносно центра О.

2. Як визначається напрямок моменту кількості руху точки відносно центра О.

3. Чому дорівнює момент кількості руху матеріальної точки відносно осі?

4. Записати теорему про зміну моменту кількості руху точки відносно центра О.

5. Записати теорему про зміну моменту кількості руху точки відносно осі.

6. Чому дорівнює кінетичний момент механічної системи відносно центра О?

7. Чому дорівнює кінетичний момент механічної системи відносно осі ?

8. Запишіть теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно центра О.

9. Запишіть теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно осі.

10. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту відносно центра О.

11. За якою формулою визначається кінетичний момент твердого тіла, яке обертається відносно осі?

12. Напишіть диференціальне рівняння обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

13. Що є мірою інертності твердого тіла при його обертовому русі навколо даної осі?

14. Якщо вал знаходиться в спокої, то що в цьому випадку рівне нулю: кінетичний момент вала чи його момент інерції?

15. $M_z^e = 0$, з якою кутовою швидкістю обертається тіло?

16. Якщо $M_z^e = const$, то чому рівне кутове прискорення тіла, яке обертається?

17. Чому рівнює момент інерції циліндричного вала масою M і діаметром D відносно його геометричної осі?

5.6. Порядок розв'язування задач при використанні теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної точки та кінетичного моменту механічної системи

1. Зображуємо матеріальну точку або механічну систему в даний момент часу.
2. Напрямляємо активні сили, які діють на матеріальну точку або механічну систему.
3. В випадку невільного руху, звільняємо матеріальну точку або механічну систему від в'язей і замінюємо їх дію реакціями.

4. Вибираємо систему координат.

5. Складаємо рівняння, які виражають теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки або кінетичного моменту механічної системи відносно координатних осей.

6. Розв'язуємо складені рівняння і визначаємо шукані величини.

5.7. Приклади розв'язування задач

Задача 1. Матеріальна точка масою m описує коло радіусом r, притягуючись до точки O цього кола. В початковий момент часу точка знаходиться в положенні B і має швидкість V_0= 1,5 $^м/_с$.

Визначити швидкість V точки в положенні D. (рис. 5.7).

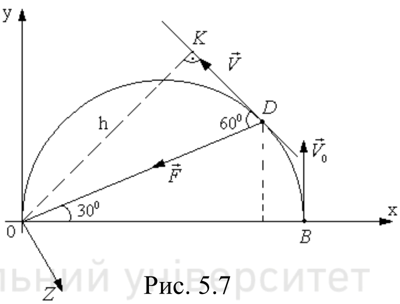


Рис. 5.7

Розв'язання

Розглянемо рух матеріальної точки. Напрямляємо силу $\vec{F}$ – силу притягання до точки A.

Вибираємо систему координат.

Складаємо рівняння, яке виражає теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно осі Oz:

$$\frac{dl_Z}{dt}=\sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k\right).$$

Оскільки сила $\vec{F}$ – центральна сила, то

$$\sum m_Z\left(\vec{F}_K\right)=m_Z\left(\vec{F}\right)=0 \quad , \quad \text{то} \quad \frac{dl_Z}{dt}=0 \ . \tag{1}$$

Інтегруючи рівняння (1), одержимо :

$$l_Z = const \text{ , тобто: } l_{Z0} = l_Z \ . \tag{2}$$

Визначимо l_{Z0} і l_Z :

$$l_{Z0} = mV_0 \cdot 2r, \tag{3}$$

$$l_Z = mV \cdot h \ . \tag{4}$$

Підставивши (3) і (4) в (2), одержимо: $mV_0\, 2r = mV\, h$.

Визначимо шукану швидкість: $V = \dfrac{2V_0\, r}{h}$.

З рисунка видно, що $OD = 2r\cos 30°$ і $h = OK = OD \cdot \sin 60° =$
$= 2r\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5r$.

Отже $V = \dfrac{2 \cdot 1{,}4 \cdot r}{1{,}5r} = 2$.

Відповідь: $V = 2$ *м/с*.

<u>Задача 2.</u> Визначити закон малих коливань матеріального маятника, довжина нитки якого l . В початковий момент часу нитка змінила вертикальне положення і в наслідок поштовху матеріальна точка мала швидкість V_0 (рис. 5.8).

Розв'язання

Зображаємо матеріальну точку в відхиленому від вертикалі на кут φ положенні. Напрямляємо активну силу $\vec{P}$.

Напрямляємо реакції в'язі $\vec{R}$. Вибираємо систему координат.

Запишемо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно осі Oz

$$\frac{dl_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k\right). \tag{1}$$

Визначимо l_Z : $l_Z = mV\,l = m\,\omega\, l^2$. (2)

Визначимо $$\frac{dl_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k\right). \tag{3}$$

$$\sum m_Z\left(\vec{F}_k\right) = -Pl\sin\varphi = -mgl\sin\varphi .$$

Підставимо (2) і (3) в (1):

$$\frac{d}{dt}\left(m\omega\, l^2\right) = -mgl\sin\varphi .$$

Оскільки коливання малі, то $\sin\varphi \approx \varphi$.

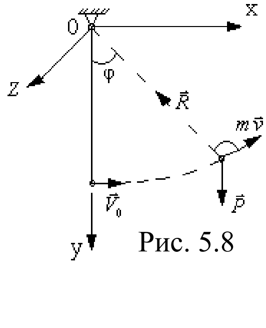


Рис. 5.8

Отже $\ddot{\varphi} + \frac{2}{l}\varphi = 0$.

Розв'язком даного лінійного рівняння є:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \ , \tag{4}$$

де $k = \frac{\sqrt{g}}{l}$.

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо з початкових умов:

При $t = 0$: $\varphi_0 = 0$; $\dot{\varphi} = \frac{V_0}{l}$.

Диференціюємо φ по t:

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \ . \tag{5}$$

Підставивши початкові умови в (4) і (5) визначимо сталі інтегрування:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0; \\ \frac{V_0}{l} = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0 \ . \end{cases}$$

Отже $C_1 = 0$.

$$C_2 = \frac{V_0}{lk} = \frac{V_0}{l\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{V_0}{\sqrt{\mathrm{lg}}} \ .$$

Закон малих коливань математичного маятника має вигляд:

$$\varphi = \frac{V_0}{\sqrt{\mathrm{lg}}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}t} \ .$$

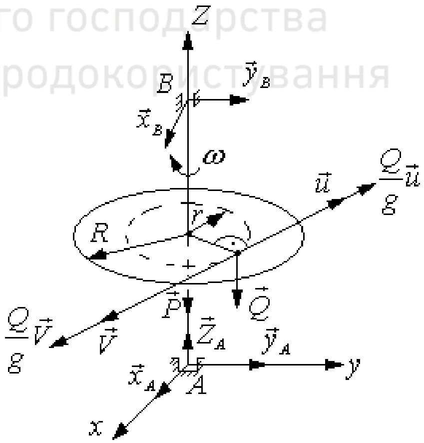


Рис 5.9

Відповідь: $\varphi = \frac{V_0}{\sqrt{\mathrm{lg}}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}t}$.

<u>Задача 3.</u> Кругла горизонтальна платформа радіусом R і вагою P (рис. 5.9) може обертатися навколо вертикальної осі Oz. В точці D платформи на віддалі r від осі Oz стоїть людина вагою Q. Яку кутову швидкість матиме платформа, якщо людина ходитиме по платформі по колу радіуса r з відносною швидкістю U. Тертям в підшипнику і підп'ятнику знехтувати. Платформу вважати однорідним диском.

Розв'язання

Зображаємо платформу і людину, прийнявши її за матеріальну точку.

Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему.

Вибираємо систему координат.

Складаємо рівняння, яке виражає теорему про зміну кінечного моменту механічної системи відносно осі Az:

$$\frac{dl_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right).$$

Оскільки: $\sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) = 0,$

то відповідно $\frac{d\vec{l}_Z}{dt} = 0.$ (1)

Інтегруючи рівняння (1) , одержимо: $L_Z = C_1 = const.$

Отже $L_{Z0} = L_Z$. (2)

В початковий момент часу механічна система знаходилась в стані спокою.

Тоді $L_{Z0} = L_{Z0}^{пл.} + l_{Z0}^{люд.} = 0$. (3)

Визначимо L_Z : $L_Z = L_Z^{пл.} + l_Z^{люд.} = 0$.

Нехай платформа обертатиметься за годинниковою стрілкою:

$$L_Z^{пл.} = -I_Z \cdot \omega = -\frac{PR^2}{2g}\omega \ .$$

Визначимо $l_Z^{люд.}$. Людина виконує складний рух: u – відносна швидкість, V – переносна швидкість: $V = \omega\, r$.

Тому $l_Z^{люд.} = \frac{Q}{g} u \cdot r - \frac{Q}{g} \omega\, r^2$. (4)

Підставимо (3) і (4) в (2):

Тоді $$0 = -\frac{PR^2}{2g}\omega + \frac{Q}{g}ur - \frac{Q}{g}\omega^2 r = 0.$$

З даного рівняння виразимо ω:

$$\omega = \frac{2Qru}{PR^2 + 2Qr^2}.$$

Відповідь: $\omega = \dfrac{2Qru}{PR^2 + 2Qr^2}$.

5.8. Порядок розв'язування задач при використанні диференціального рівняння обертального руху навколо нерухомої осі

1. Зображуємо абсолютно тверде тіло в даний момент часу.
2. Напрямляємо зовнішні сили, які діють на тіло.
3. Вибираємо систему координат, одну з осей напрямляємо по осі обертання.
4. Записуємо диференціальне рівняння обертального руху тіла.
5. Визначаємо алгебраїчну суму моментів всіх зовнішніх сил, які діють на тіло, відносно осі обертання.
6. В залежності від умов задачі розв'язуємо пряму або обернену задачу і визначаємо шукані величини.

5.9. Приклади розв'язування задач

<u>Задача 1.</u> Однорідний диск масою M=10 *кг* (рис. 5.10) обертається з кутовою швидкістю $\omega_0 = 6\pi \cdot c^{-1}$. Визначити сталу силу тертя, яка зупиняє диск за 12 *с*, якщо радіус диска $R = 0{,}5\, м$.

Розв'язання

Зображаємо диск в даний момент часу (рис 5.10).

Напрямляємо сили, які діють на диск.

Вибираємо систему координат. Записуємо диференціальне

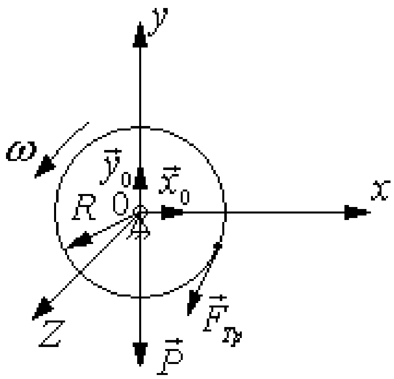


Рис. 5.10

рівняння обертального руху диска:

$$I_Z \ \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\ e}\right).$$

Визначимо

$$\sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\ e}\right) = -F_{Tp} \cdot R \ .$$

Оскільки $I_Z = \dfrac{MR^2}{2}$, то:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2F_{Tp}}{MR} \ . \qquad (1)$$

Початкові умови: при $t = 0 : \omega = \omega_0 = 6\pi$ с$^{-1}$.

Проінтегруємо рівняння (1):

$$\int_{6\pi}^{0} d\omega = -\frac{2F_{Tp}}{M \cdot R}\int_{0}^{12} dt \ ,$$

$$-6\pi = -\frac{2F_{Tp}}{MR} \cdot 12 \ .$$

Отже $F_{Tp} = \dfrac{6\pi \cdot MR}{24} = \dfrac{6\pi \cdot 10 \cdot 0.5}{24} = 3.925 \ (H)$.

Відповідь: $F_{Tp} = 3{,}925\, H$.

<u>Задача 2.</u> Однорідний стержень OA довжиною $2l$ і масою M (рис. 5.11) може обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через точку O.

Кінець стержня A прикріплений до горизонтальної

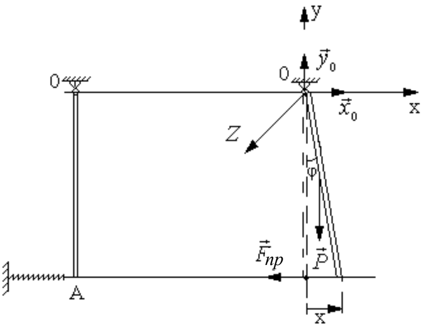


Рис. 5.11

пружини, жорсткість якої C. Визначити закон малих коливань стержня, якщо в початковий момент часу стержень займав вертикаль-не положення і йому надана початкова швидкість $\omega_0 = 2\,\pi\, c^{-1}$.

Розв'язання

Зображуємо стержень в проміжний момент часу (рис. 5.11). Напрямляємо зовнішні сили, які діють на стержень.

Записуємо диференціальне рівняння обертального руху стержня навколо осі Oz:

$$I_Z \; \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right). \tag{1}$$

Момент інерції стержня:

$$I_Z = \frac{4}{3} M l^2 \tag{2}$$

Визначимо $\sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right)$:

$$\sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) = -pl\sin\varphi - F_{np} l\cos\varphi \;.$$

Враховуючи, що коливання малі:

$\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi = 1$ і $F_{np} = cx = cl\sin\varphi$, одержимо:

$$\sum_{k=1}^{n} m_Z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) = -Mgl\cdot\varphi - cl^2\varphi \;. \tag{3}$$

Підставимо (2) і (3) в (1):

$$\frac{4}{3} M l^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = -Mdl\varphi - cl^2\varphi \;\; ;$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{3}{4Ml}\left(Mg + cl\right)\varphi \;,$$

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \;\; , \tag{4}$$

де $k^2 = \dfrac{3}{4Ml}\left(Mg + cl\right)$.

Початкові умови: при $t=0$: $\varphi_0=0$, $\dot{\varphi}_0=2\pi\ c^{-1}$.

Проінтегруємо диференціальне рівняння (4):

$$\varphi=C_1\cos kt+C_2\sin kt\ . \qquad (5)$$

Щоб сталі інтегрування, продиференціюємо (5) по часу:

$$\dot{\varphi}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt\ . \qquad (6)$$

Підставимо початкові умови в (5) і (6):

$$\begin{cases}0=C_1\cos 0+C_2\sin 0,\\ 2\pi=-C_1k\sin 0+C_2k\cos 0.\end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, визначимо C_1 і C_2:

$$C_1=0; \qquad C_2=\frac{2\pi}{k}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{Ml}(Mg+cl)}} \qquad (7)$$

Підставивши(7) в (5), визначимо закон малих коливань:

$$\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{Ml}(Mg+cl)}}\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(Mg+cl)}{Ml}}\right]\cdot t\ .$$

Відповідь:

$$\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{Ml}(Mg+cl)}}\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(Mg+cl)}{Ml}}\right]\cdot t,\ рад.$$

6. ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

6.1. Робота сили

Елементарною роботою сили називається робота сили на елементарному переміщенні (рис.6.1) і виражається формулою:

$$d'A = F\cos\alpha \cdot ds \quad . \quad (6.1)$$

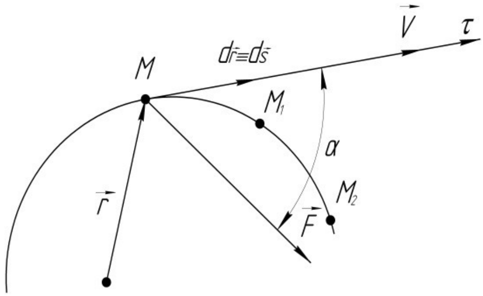


Рис. 6.1

У векторній формі елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на вектор приросту радіуса-вектора:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \ . \qquad (6.2)$$

Якщо сила прикладена до тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, то:

$$d'A = m_z\left(\vec{F}\right)d\varphi \ . \qquad (6.3)$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту тіла навколо нерухомої осі.

Повна робота сили на деякому кінцевому переміщені $\overset{\cup}{M_1 M_2} = S$ обчислюється за формулою:

$$A = \int_0^S F\cos\alpha \cdot ds \quad . \qquad (6.4)$$

Повна робота сили, прикладеної до тіла, яке обертається навколо нерухомої осі обчислюється за формулою:

$$A = \int_0^{\varphi} m_z\left(\vec{F}\right) d\varphi \quad . \qquad (6.5)$$

Елементарна і повна робота від моменту, який діє на тіло, що обертається визначається за формулами:

$$\begin{cases} dA = Md\varphi \;, \\ A = \int\limits_0^{\varphi} Md\varphi \;. \end{cases} \tag{6.6}$$

Повна робота рівнодійної сили дорівнює алгебраїчній сумі повних робіт складових сил:

$$A_R = A_{F_1} + A_{F_2} + ... + A_{F_n} \;. \tag{6.7}$$

Робота сили тяжіння дорівнює взятому із знаком плюс або мінус добутку сили тяжіння на величину переміщення по вертикалі її точки прикладання:

$$A = \pm P\, h \;. \tag{6.8}$$

Якщо переміщення відбувається вгору, то $A < 0$, а якщо вниз, то $A > 0$.

Робота сили пружності пружини :

Нехай довжина нерозтягнутої пружини l_0 , її жорсткість C, то якщо $OM = r_1$ і $OM_2 = r_2$ (рис. 6.2), то робота сили пружності пружини визначається:

Рис. 6.2

$$A = -\int\limits_{r_1}^{r_2} l(r - l_0)\; dr = \frac{c}{2}\left[(r_1 - l_0)^2 - (r_2 - l_0)^2\right]. \tag{6.9}$$

Потужність N характеризує швидкість, з якою виконується робота, і в загальному випадку визначається як похідна від роботи за часом :

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} = F\,V\cos\alpha \;. \tag{6.10}$$

При обертальному русі тіла під дією моменту М, потужність визначається за формулою:

$$N = M\,\omega \;. \tag{6.11}$$

В технічній системі одиниць робота вимірюється в $кГ{\cdot}м$;

в $CI - H\ м = Дж.$

В технічній системі одиниць потужність вимірюється в $\dfrac{кГ \cdot м}{с}$;

в СІ – $\dfrac{H\ м}{с} = \dfrac{Дж}{с} = Вт$.

В техніці часто потужність виражають у кінських силах :

$$1 к.с. = 75 \frac{кГ \cdot м}{с} = 736\ Вт .$$

6.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Кінетичною енергією матеріальної точки називається половина добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$\frac{mV^2}{2}. \tag{6.12}$$

Диференціал від кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт всіх сил, які діють на матеріальну точку:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} d'A_k \ . \tag{6.13}$$

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт всіх сил, які діють на матеріальну точку на цьому ж переміщенні:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_k \ . \tag{6.14}$$

6.3. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Кінетична енергія механічної системи дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій матеріальних точок, які входять в склад механічної системи:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k {V_k}^2}{2} \ . \tag{6.15}$$

Якщо абсолютно тверде тіло рухається поступально, то швидкості всіх його точок геометрично рівні і рівні швидкості центра мас, то кінетична енергія тіла визначається за формулою:

$$T = \frac{MV_C^2}{2} \ , \qquad (6.16)$$

де M – маса тіла.

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі, то кінетична енергія тіла дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості:

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2} \ . \qquad (6.16)$$

Якщо тіло виконує плоскопаралельний рух, то кінетична енергія тіла визначається за формулою:

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_{Cz} \omega^2}{2} \, , \qquad (6.17)$$

де V_C – швидкість центра мас тіла, I_{Cz} – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас тіла і перпендикулярної до нерухомої площини, паралельно якій рухається тіло.

Теорема в диференціальній формі:
диференціал від кінетичної енергії механічної системи дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на механічну систему:

$$dT = \sum d'A_k^e + \sum d'A_k^i \ . \qquad (6.18)$$

Теорема в кінцевій (інтегральній) формі:
зміна кінетичної енергії на деякому переміщені дорівнює алгебраїчній сумі робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на механічну систему:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \ . \qquad (6.19)$$

Незмінюваною називається така механічна система, віддалі між точками прикладання внутрішніх сил якої не змінюються.

Це системи, які складаються з абсолютно твердих тіл і нерозтяжних ниток.

Теорема про зміну кінетичної енергії незмінюваної механічної системи в диференціальній і кінцевій (інтегральній) формі:

$$\begin{cases} dT = \sum d'A_k^e \ , \\ T - T_0 = \sum A_k^e . \end{cases} \qquad (6.20)$$

6.4. Питання для самопідготовки

1. Напишіть вираз елементарної роботи в вигляді скалярного добутку.
2. Напишіть вираз елементарної роботи в аналітичній формі.
3. Напишіть вираз повної роботи сили за кінцевий проміжок часу в вигляді скалярного добутку.
4. Напишіть вираз повної роботи сили за кінцевий проміжок часу в аналітичній формі.
5. Скалярною чи векторною величиною є робота?
6. Яка розмірність роботи в міжнародній системі одиниць (СІ)?
7. Як визначається робота сили тяжіння?
8. Чому дорівнює робота сили тяжіння при русі точки по замкнутому контуру?
9. Напишіть рівняння роботи лінійної сили пружності.
10. Сформулюйте теорему про роботу рівнодіючої сили.
11. Приведіть приклади потенціальних сил.
12. Як визначається повна робота сили, прикладеної до твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі. якщо момент сили сталий?
13. Як визначається в загальному випадку повна робота сили, прикладеної до твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?
14. Чому дорівнює сума робіт внутрішніх сил твердого тіла при будь-якому його переміщенні?
15. За якою формулою визначається потужність сили в загальному випадку?
16. Яка розмірність потужності в міжнародній системі одиниць (СІ)?
17. Чому дорівнює кінетична енергія матеріальної точки?
18. Чому дорівнює кінетична енергія механічної системи?
20. Чи може бути кінетична енергія від’ємною величиною?

21. Яка розмірність кінетичної енергії в міжнародній системі одиниць (СІ)?

22. Напишіть вираз кінетичної енергії твердого тіла при поступальному русі.

23. Напишіть вираз кінетичної енергії твердого тіла при обертальному русі.

24. Напишіть вираз кінетичної енергії механічної системи в абсолютному русі (теорема Кенінга).

25. Напишіть вираз кінетичної енергії твердого тіла при плоскопаралельному русі.

28. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференційній формі.

27. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі.

28. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної і енергії системи в диференційній формі.

29. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі.

6.5. Порядок розв'язування задач

1. Зображуємо механічну систему (матеріальну точку) в даний момент часу.
2. Зображуємо активні сили, які діють на систему (точку).
3. В випадку невільного руху, звільняємо систему (точку) від в'язей і замінюємо їх дію реакціями в'язей.
4. Складаємо рівняння, які становлять теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи (точки).
5. Розв'язуючи отримане рівняння, визначимо шукані величини.

Зауваження. Якщо на механічну систему (точку) діють змінні сили, то теорему бажано використовувати в диференціальній формі.

6.6. Приклади розв'язування задач

Задача 1. Важке тіло масою m піднімається по жорсткій похилій площині під дією сталої сили $F = 6\,m, H$ з початковою швидкістю $V_0 = 1$ *м/с* коефіцієнт тертя ковзання $f = 0{,}1$ (рис. 6.3).

Яку швидкість матиме тіло, якщо шлях, який воно пройде S=4 *м*. Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30^{\circ}$. Сила $\vec{F}$ напрямлене в бік швидкості тіла.

Розв'язування

Зображуємо тіло, прийнявши його за матеріальну точку, в початковий момент часу (рис. 6.3).

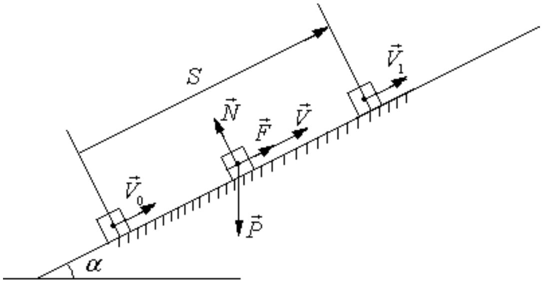


Рис. 6.3

Напрямляємо активні сили. Відкидаємо в'язь і замінюємо дію в'язі на тіло складовими реакції в'язі: $\vec{N}$ і $\vec{F}_{mp}$.

Відомо, що

$$F_{mp} = f\,N = f\,P\cos 30^{\circ} = f\,mg\cos 30^{\circ}.$$

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в кінцевій (інтегральній) формі:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_K, \tag{1}$$

Визначимо суму робіт всіх сил, які діють на матеріальну точку на переміщення S:

$$\sum_{k=1}^{n} A_K = F \cdot S - P\sin 30^0 - F_{Tp} \cdot S = 6mS - mgS\sin 30^0 - fmgcjs30^0 \cdot S =$$

$$= mS\left(6 - 9{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866\right) = 0{,}251mS.$$

Отже

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = 0{,}251ms \tag{2}$$

Підставивши (2) в (1), одержимо:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = 0{,}251mS.$$

Визначимо V_1:

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 + 0{,}251 \cdot S} = \sqrt{1^2 + 0{,}251 \cdot 4} \approx 1{,}42 \ \text{м/с}.$$

Відповідь: $V_1 = 1{,}42$ *м/с*.

<u>Задача 2.</u> На якій віддалі зупиниться тіло масою m, яке, рухаючись по горизонтальній гладкій площині, гальмується силою $F_{оп} = 0{,}2mVH$, якщо початкова швидкість $V_0 = 2{,}8$ *м/с*?

Розв'язання

Приймаючи тіло за матеріальну точку, зображаємо його в поточний момент часу (рис. 6.4). Зображаємо активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо реакції в'язей $\vec{N}$ і $\vec{F}_{оп}$.

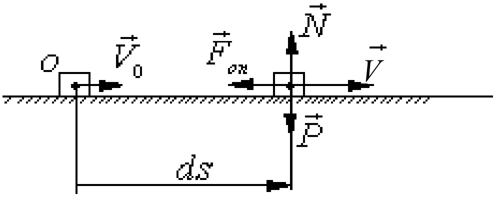


Рис. 6.4

Оскільки на тіло діє змінна сила, то записуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} d'A_k \, . \tag{1}$$

Визначимо суму елементарних робіт всіх сил, які діють на тіло:

$$\sum_{k=1}^{n} d'A_k = -F_{оп} dS = -0{,}2mV^2 dS \, . \tag{2}$$

Підставимо (2) в (1):

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = -0{,}2mVdS; \qquad VdV = -0{,}2VdS.$$

Розділяємо змінні та інтегруємо:

$$\int_{V_0}^{0} dV = -0{,}2\int_{0}^{S} dS, \Rightarrow -V_0 = -0{,}2\,S,$$

$$S = V_0/0{,}2 = 2{,}8/0{,}2 = 14\,м.$$

Відповідь: $S = 14$ *м.*

<u>Задача 3.</u> Транспортер (рис. 6.5) приводиться в рух із стану спокою приводом, приєднаним до шківа *B*. Привід надає цьому шківу сталий обертовий момент *M*.

Визначити швидкість вантажу в залежності від його переміщення *S*, якщо вага вантажу *A* рівна *P*, а шківи *B* та *C* радіусом r і вагою кожний. Шківи вважати однорідними дисками, а масою стрічки транспортера знехтувати. Стрічка транспортера складає кут α з горизонтом.

Розв'язання

Зображаємо систему, яка складається із стрічки транспортера, шківів *B* та *C*, вантажу *A*.

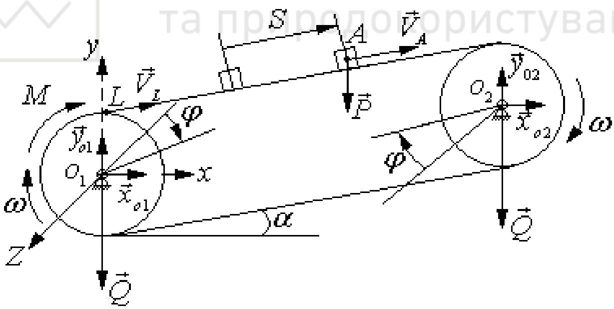


Рис. 6.5

Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему і момент *M*.

Записуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в кінцевій (інтегральній) формі:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_K^e + \sum_{k=1}^{n} A_K^i \quad .$$

Оскільки механічна система незмінна, то:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0, \text{ тоді } T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e .$$

В початковий момент часу механічна система нерухома. Тоді $T_0 = 0$.

Отже
$$T = \sum_{k=1}^{n} A_K^e \quad . \tag{1}$$

Виразимо T через V_A:

$$T = T_A + T_B + T_C . \tag{2}$$

Вантаж A виконує поступальний рух. Отже

$$T_A = \frac{m_A V_A{}^2}{2} = \frac{P V_A{}^2}{2g} \tag{3}$$

Шківи мають однакову масу, однакові кутові швидкості.

Тоді
$$T_B = T_C = \frac{I_Z \omega^2}{2} .$$

Момент інерції шківа: $I_Z = \dfrac{m_B z^2}{2} = \dfrac{Qr^2}{2g}$.

Отже

$$T_B = T_C = \frac{Qr^2 \omega^2}{4g} = \frac{Q V_L^2}{4g} = \frac{Q V_A^2}{4g} . \tag{4}$$

Підставимо (3) і (4) в (2):

$$T = \frac{P V_A^2}{2g} + 2 \cdot \frac{Q V_A^2}{4g} = \frac{V_A^2}{2g}\left(P + Q\right) . \tag{5}$$

Визначимо суму робіт зовнішніх сил:

$$\sum_{k=1}^{n} A_K^e = M \cdot \varphi - P \cdot s \sin\alpha = M \cdot \frac{S}{r} - PS \sin\alpha . \tag{6}$$

Підставивши (5) і (6) в (1), визначимо швидкість вантажу:

$$\frac{V_A^2}{2g}(P+Q)=\frac{S}{r}=(M-Pr\sin\alpha),$$

$$V_A=\sqrt{\frac{2gS}{r}\frac{M-Pr\sin\alpha}{P+Q}}\ .$$

Відповідь: $V_A=\sqrt{\dfrac{2gS}{r}\dfrac{M-Pr\sin\alpha}{P+Q}}$.

Задача 4. Котушка (рис. 6.6) починає рухатися із стану спокою під дією сталої сили F, приводячи в рух вантаж.

Визначити прискорення вантажу, якщо маса котушки M, маса вантажу m і $R=2r, i_z=r$ – радіус інерції котушки, $\alpha-$кут нахилу площини до горизонту.

Вважати нитку ідеальною і знехтувати силами опору рухові.

Розв'язання. Зображаємо механічну систему в даний момент часу. Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему.

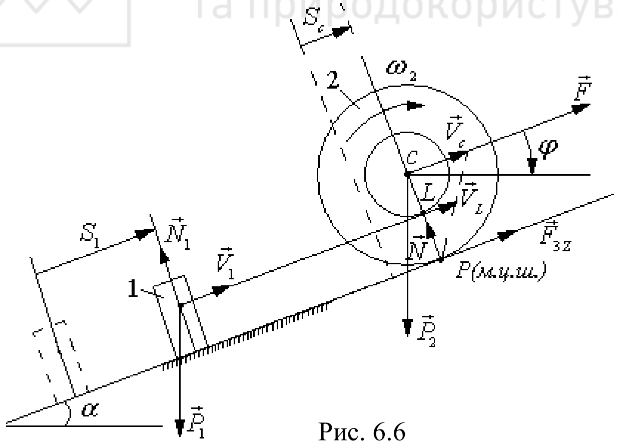


Рис. 6.6

Записуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в кінцевій (інтегральній) формі для незмінюваної системи:

$$T-T_0=\sum_{k=1}^{n}A_K^e\ .$$

Оскільки механічна система в початковий момент часу була в нерухомою, то $T_0 = 0$.

Отже $$T = \sum_{k=1}^{n} A_K^e \quad . \qquad (1)$$

Виразимо кінетичну енергію механічної системи через V_1:

$$T = T_1 + T_2 . \qquad (2)$$

Вантаж виконує поступальний рух:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m V_1^2}{2} . \qquad (3)$$

Котушка виконує плоскопаралельний рух:

$$T_2 = \frac{m_2 V_c^2}{2} + \frac{I_{Zc}\omega_2^2}{2} \quad ,$$

$m_2 = M$, момент інерції котушки: $I_{Cz} = M i_z{}^2 = M r^2$.

Виразимо V_c і ω_2 через V_1:

$$\frac{V_C}{CP} = \frac{V_L}{LP} = \omega_2, \quad V_L = V_1, \quad V_C = \frac{V_L \cdot CP}{LP} = 2V_1, \quad \omega_2 = \frac{2V_1}{2r} = \frac{V_1}{r} .$$

Тоді $$T_2 = \frac{4MV_1^2}{2} + \frac{Mr^2V_1^2}{2r^2} = \frac{5MV_1^2}{2} \quad .$$

Отже $$T_2 = \frac{5MV_1^2}{2} \quad . \qquad (4)$$

Підставимо (3) і (4) в (2):

$$T = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{5MV_1^2}{2} = \frac{V_1^2}{2}\left(m + 5M\right) .$$

Отже $$T = \frac{V_1^2}{2}\left(m + 5M\right) . \qquad (5)$$

Визначимо силу робіт зовнішніх сил:

$$\sum_{k=1}^{n} A_K^e = F \cdot S_c - P_2 \cdot S_c \sin\alpha - P_1 \cdot S_1 \sin\alpha .$$

Враховуючи, що $V_c = 2V_1$, $S_c = 2S_1$, матимемо:

$$\sum_{k=1}^{n} A_K^e = 2F\,S_1 - 2MgS_1 \sin\alpha - mgS_1 \sin\alpha =$$
$$= S_1\left[2F - (2M + m)g\sin\alpha\right].$$

Отже $$\sum_{k=1}^{n} A_K^e = S_1\left[2F - (2M + m)g\sin\alpha\right]. \qquad (6)$$

Підставивши (5) і (6) в (1), визначимо V_1^2:

$$\frac{V_1^2}{2}(m + 5M) = S_1\left[2F - (2M + m)g\sin\alpha\right];$$
$$V_1^2 = \frac{2\left[2F - (2M + m)g\sin\alpha\right]}{m + 5M} \cdot S_1. \qquad (7)$$

Продиференціювавши праву і ліву частини рівності (7) по часу, визначимо прискорення вантажу:

$$2 \cdot V_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} = \frac{2\left[2F - (2M + m)g\sin\alpha\right]}{m + 5M} \cdot \frac{dS_1}{dt}.$$

Оскільки $V_1 = \dfrac{dS_1}{dt}$ і $\dfrac{dV_1}{dt} = a_1$, матимемо:

$$a_1 = \frac{2F - (2M + m)g\sin\alpha}{m + 5M}.$$

Відповідь: $a_1 = \dfrac{2F - (2M + m)g\sin\alpha}{m + 5M}$.

<u>Задача 5.</u> Тонкостінну трубу *1* масою M=100 кг з початкового стану спокою підіймають, приклавши до шківа 2 масою m=10 кг змінний момент $M_{об}$= 0,5gr(6,2t+80), *Н·м*, де r – радіус шківа, g – прискорення вільного падіння (рис. 6.7).

Яку швидкість матиме центр труби C в момент часу $t = 10$ *с*, якщо шків вважати однорідним диском? Трос є нерозтяжним. Сили опору рухові вважати незначними.

Розв'язання

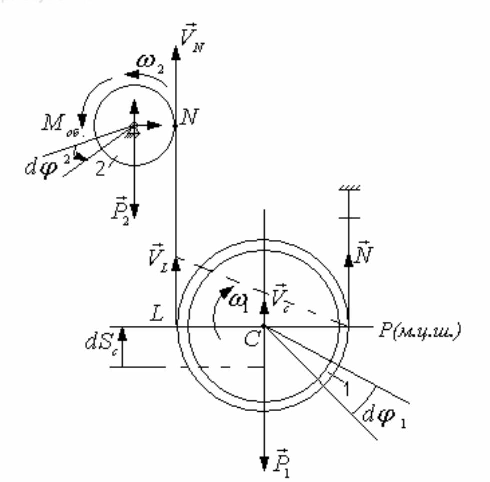


Рис. 6.7

Механічна система починає рухатись із стану спокою. Зображаємо механічну систему в момент часу dt. Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему, а також діючий момент $M_{об}$.

Механічна система незмінна. Оскільки на механічну систему діє змінний момент, то використовуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} d'A_k^e \ . \tag{1}$$

Виразимо T через $V_с$:

$$T = T_1 + T_2 \, . \tag{2}$$

Тіло *1* виконує плоскопаралельний рух:

$$T_1 = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{I_{Zc}^{(i)} \cdot \omega_1^2}{2} \ , \qquad \omega_1 = \frac{Vc}{CP} = \frac{V_C}{R} \ .$$

Момент інерції тіла 1: $I_{Zc}^{(i)} = MR^2$.

Отже $T_1 = \dfrac{MV_c^2}{2} + \dfrac{MR^2 V_c^2}{2R^2} = MV_c^2$.

Тіло 2 виконує обертальний рух:

$$T_2 = \frac{I_z^{(2)}\omega_2^2}{2}, \quad \omega_2 = \frac{V_N}{r} = \frac{V_L}{r} = \frac{2V_C}{r}, \quad I_z^{(2)} = \frac{mr^2}{2} \ .$$

Отже $T_2 = \frac{mr^2}{4} \cdot \frac{4V_c^2}{r^2} = mV_c^2$.

Підставивши T_1 і T_2 в (2), одержимо:

$$T = MV_C^2 + mV_C^2 = V_C^2(M+m) = (100+10)V_C^2 = 110V_C^2 \ .$$

Отже $$T = 110V_C^2 \ . \qquad (3)$$

Визначимо алгебраїчну суму елементарних робіт зовнішніх сил:

$$\sum_{k=1}^{n} d'A_k^e = M_{об}\,dS_C - P_1 dS_C = \frac{2}{r} \cdot 0{,}5 \cdot gr(6{,}2t+80) - mg\,dS_C =$$

$$= (6{,}2t+80-100) \cdot gdS_C = (6{,}2t-20) \cdot 9{,}8 \cdot dS_C .$$

Отже $$\sum_{k=1}^{n} d'A_K^e = 9{,}8(6{,}2t-20)dS_C \ . \qquad (4)$$

Підставимо (3) і (4) в (1): $d(110 \cdot V_C^2) = 9{,}8(6{,}2t-20)dS_C$.

Помножимо і поділимо на dt праву частину рівності:

$$110 \cdot 2 \cdot V_c \cdot dV_c = 9{,}8(6{,}2t-20)\frac{dS_c}{dt} \cdot dt \ .$$

Оскільки $V_c = \frac{dS_c}{dt}$, то $dV_C = \frac{9{,}8}{220}(6{,}2t-20)dt$.

Проінтегруємо: $\int_0^{V_c} dV_c = \frac{9{,}8}{220}\int_0^{10}(6{,}2t-20)dt$,

звідки $V_C = \frac{9{,}8}{220}\left(6{,}2\frac{t^2}{2} - 20t\right)\Big|_0^{10} = \frac{9{,}8}{220}(6{,}2 \cdot 50 - 20 \cdot 10) = 4{,}9\,(м/с)$.

Відповідь: $V_c = 4{,}9$ *м/с*.

7. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

7.1. Невільні системи матеріальних точок. В'язі. Можливі і дійсні переміщення

Невільною називається система матеріальних точок, на рухи яких накладені деякі обмеження. Пристрої, які накладають обмеження на рухи точок, називається в'язями.

Вязі, які на накладають обмеження тільки на координати точок, називаються геометричними.

В'язі які накладають обмеження на координати точок і їх швидкості, називаються кінематичними.

Якщо в'язі не залежать від часу, тобто, якщо в рівняння в'язей не входить явно час t, то такі в'язі називаються стаціонарними; якщо в рівняння в'язей явно входить час t, то в'язі називаються нестаціонарними.

Утримуючі, або двобічні в'язі, це такі в'язі, які обмежують переміщення точки в двох протилежно напрямлених напрямках.

Не утримуючі, або однобічні в'язі, це такі вязі, які обмежують переміщення точки тільки в одному напрямку.

Можливими переміщеннями називаються такі нескінченно малі переміщення, які допускаються в'язями в даний момент часу.

Ідеальними в'язями називається в'язі, сума робіт реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_K \cdot \delta\ \vec{r}_K = 0. \qquad (7.1)$$

Число незалежних можливих переміщень механічної системи дорівнює числу ступенів вільності механічної системи.

Дійсними переміщеннями називаються нескінченно малі переміщення, які отримають точки під дією конкретних сил при зміні часу.

7.2. Принцип можливих переміщень

Для рівноваги системи матеріальних точок, на яку накладені ідеальні стаціонарні в'язі, необхідно і достатньо, щоб сума робіт активних сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнювала нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\ \vec{r}_k = 0. \qquad (7.2)$$

В проекціях на осі декартової системи координат:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \cdot \delta\ x_k + F_{ky} \cdot \delta\ y_k + F_{kz} \cdot \delta\ z_k \right) = 0. \qquad (7.3)$$

7.3. Питання для самопідготовки

1. Як називаються в'язі, які залежать від часу?

2. Як називаються в'язі, які не залежать від часу?

3. Як називають в'язі, які накладають обмеження на положення точок системи, але не на їх швидкості?

4. Як називають в'язі, які накладають обмеження не тільки на положення точок системи, а також і на їх швидкості?

5. Прикладом якої в'язі є в'язь, яка накладається за допомогою гнучкої, нерозтяжної і невагомої нитки?

8. Як називаються в'язі, якщо сума елементарних робіт реакцій цих в'язей на будь-якому можливому переміщенні системи рівна нулю?

7. Прикладом якої в'язі є в'язь, яка накладається за допомогою абсолютно гладкої поверхні?

8. Скільки ступенів вільності має вільна матеріальна точка?

9. Чому дорівнює число ступенів вільності механічної системи, яка складається з “n” матеріальних точок?

10. Скільки ступенів вільності має тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі?

11. Скільки ступенів вільності має важіль?

12. Скільки ступенів вільності має кривошипно-шатунний механізм?

13. Як називаються нескінчено малі переміщення механічної системи, які допускаються в даний момент накладеними на систему в'язями?

14. Чи є кожне дійсне переміщення одним з можливих переміщень?

15. Чи будуть рівні між собою проекції переміщень двох точок абсолютно твердого тіла на пряму, яка з'єднує ці точки?

16. Визначіть проекції можливого переміщення деякої точки С на осі X і Y. якщо відомі її координати: $X_0 = r\sin\varphi;\;\; Y_0 = r\cos\varphi;$.

17. Користуючись виразом елементарної роботи в вигляді скалярного добутку, напишіть рівняння робіт, яке виражає принцип можливих переміщень.

18. Користуючись аналітичним виразом елементарної роботи.напишіть рівняння робіт.яке виражає принцип можливих переміщень.

19. Чи дозволяє принцип можливих переміщень визначити реакції в'язей?

20. Чому дорівнює число рівнянь рівноваги, які дає принцип можливих переміщень для досліджуваної системи з голономними в'язями?

7.4. Порядок розв'язування задач

1. Зображуємо механічну систему .
2. Напрямляємо активні сили.
3. Якщо в'язі не ідеальні, то замінюємо їх дію реакціями.
4. Надаємо системі можливе переміщення і показуємо на малюнку вектори можливих переміщень точок прикладання сил і кути можливих поворотів тіл.
5. Записуємо рівняння, яке виражає принцип можливих переміщень.
6. Всі можливі переміщення, які входять в записане рівняння, виражаємо через одне.
7. З отриманого рівняння визначаємо шукану величину.

Примітка:

Якщо система має *n* ступенів вільності, то задаються *n* незалежним числом можливих переміщень системи. При складанні кінцевого рівняння враховується тільки кінцеве можливе переміщення, а інші рахуються рівними нулю.

З отриманої *n* системи рівнянь визначаються шукані величини.

7.5. Приклади розв'язування задач

Задача 1. В точці O похилої площини влаштовано нерухомий блок (рис. 7.1), через який перекинуто нерозтяжну нитку, прикріплену кінцями до двох вантажів $P = 30\,H$ і Q=60 H.

Нехтуючи масою блока і вважаючи площину гладенькою, визначити кут α при рівновазі.

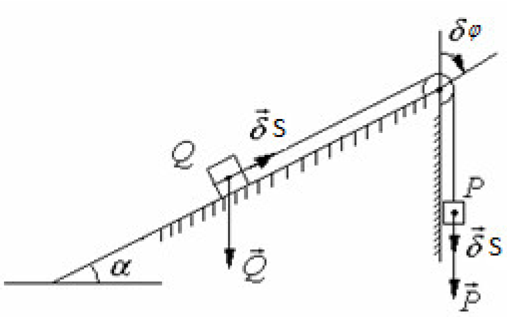


Рис. 7.1

Розв'язання

Зображуємо активні сили, які діють на механічну систему. Надаємо механічній системі можливе переміщення. Система має один ступінь вільності. Записуємо принцип можливих переміщень:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_K \cdot \delta\ \vec{r}_K = 0. \qquad (1)$$

Складаємо рівняння (1):

$$P \cdot \delta S - Q \cdot \delta S \sin\alpha = 0\ ;\ \ \delta S\left(P - Q\sin\alpha\right) = 0.$$

Оскільки $\delta S \neq 0$, то $P - Q\sin\alpha = 0$.

Отже $\sin\alpha = \dfrac{p}{Q}$. $\sin\alpha = \dfrac{30}{60} = 0{,}5;\ \alpha = 30^{o}$.

Відповідь: $\alpha = 30^{\circ}$.

Задача 2. До повзунка A механізму еліпсографа прикладена сила $\vec{P}$, напрямлена вздовж направляючої повзуна до осі обертання O кривошипа OC (рис. 7.2). Який обертаючий момент потрібно прикласти до кривошипа OC для того, щоб механізм був у рівновазі в положенні, коли кривошип OC складає з напрямляючою повзуна OB кут φ? Механізм розташовано в горизонтальній площині, причому дано: $OC = AC = CB = l$.

Розв'язання

Напрямляємо активну силу $\vec{P}$ і активний момент M.

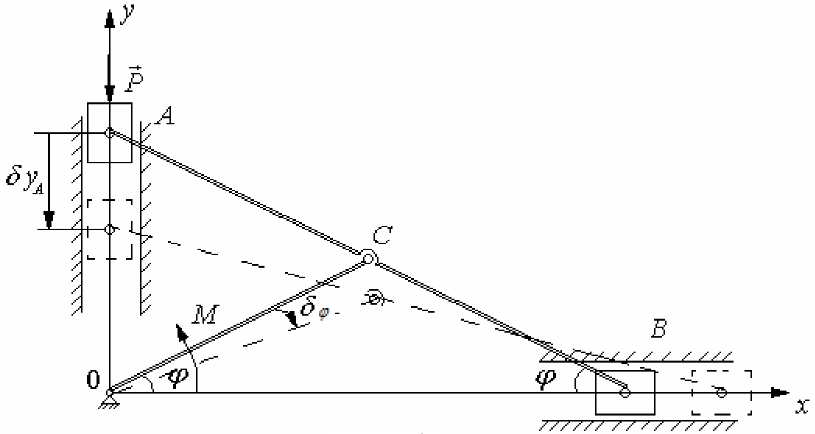


Рис. 7.2

Оскільки в’язі ідеальні, то реакції в’язей не напрямляємо.

Система має один ступінь вільності. Надаємо можливе переміщення кривошипу $\delta\varphi$. Позичимо можливе переміщення в точці A як δy_A (A – точка прикладання сили $\vec{P}$).

Записуємо принцип можливих переміщень:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_K \cdot \delta\ \vec{r}_K = 0. \qquad (1)$$

Складаємо рівняння (1):

$$P \cdot \delta y_A - M \cdot \delta\varphi = 0. \qquad (2)$$

Оскільки $y_A = 2l\sin\varphi$, виразимо $\delta\varphi_A$ через $\delta\varphi$.

А саме: $\delta\varphi_A = 2l\cos\varphi\delta\varphi$.

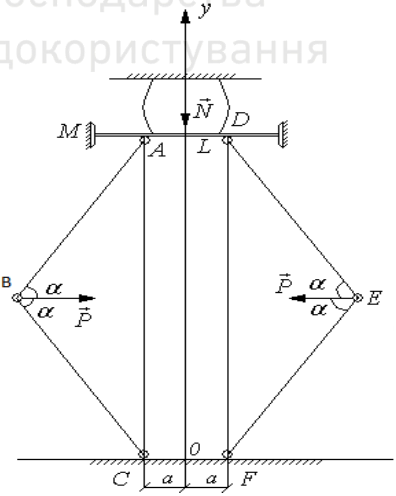


Рис. 7.3

Підставимо (3) в (2):

$$P \cdot 2l\cos\varphi \cdot \delta\varphi - M \cdot \delta\varphi = 0,$$

$\delta\varphi(2Pl\cos\varphi - M) = 0.$ Оскільки $\delta\varphi \neq 0$, то $2Pl\cos\varphi - M = 0.$

Визначимо M: $M = 2Pl\cos\varphi$.

Відповідь: $M = 2Pl\cos\varphi$.

<u>Задача 3.</u> Простий важільний прес складається із з'єднаних між собою шарнірних стержнів AB і BC, DE і EF однакової довжини l кожний (рис. 7.3). Стержні з'єднані з горизонтальною платформою MN, що піднімається, на яку кладеться пресоване тіло. Знайти співвідношення між силами $\vec{P}$ *і* $\vec{Q}$, яка тисне на тіло при рівновазі.

Розв'язання. Напрямляємо активні сили $\vec{P}$ *і* $\vec{Q}$.

Напрямляємо реакцію в'язі $\vec{N}$.

Відомо, що: $\vec{Q} = -\vec{N}$.

Вибираємо систему координат. Записуємо принцип можливих переміщень:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\cdot\delta x_k + F_{ky}\ \delta y_k\right) = 0. \tag{1}$$

Складаємо рівняння (а):

$$P\cdot\delta x_B - P\cdot\delta x_E - N\cdot\delta y_L = 0. \tag{2}$$

З рисунку 7.7 видно:

$x_B = -a - l\cos\delta\alpha$, $x_E = a + l\cos\alpha$, $y_L = 2l\sin\alpha$.

Визначимо δx_B, δx_E, δy_L, (l=*const*, a=*const*):

$$\begin{cases}\delta x_B = l\sin\alpha\cdot\delta\alpha,\ \delta x_E = -l\sin\alpha\cdot\delta\alpha, \\ \delta y_L = 2l\cos\alpha\cdot\delta\alpha\ .\end{cases} \tag{3}$$

Підставляємо (3) в (2), звідки, позбувшись $\delta\alpha$ ($\delta\alpha \neq 0$),

$$N = P\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = Ptg\alpha\ .$$

Відповідь: $Q = Ptg\alpha$.

<u>Задача 4.</u> Складена балка *AD*, яка лежить на трьох опорах, складається з балок *AC* і *CD,* шарнірно з'єднаних в точці *C* (рис. 7.4, а).

На балку діють вертикальні сили $P_1 = 2\,кН$, $P_2 = 6\,кН$, і момент $M = 4\,кН\;м$. Визначити опорні реакції в точках A, B і D.

Розв'язання. Визначимо R_A.

Для цього умовно відкидаємо опору A і замінюємо дію опори на балку реакцією $\vec{R}_A$ (рис. 7.4, б). надаємо можливе переміщення в точці A: δs_A.

При цьому балка займе положення, зображене на рис. 7.4, б.

Запишемо принцип можливих переміщень:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \tag{1}$$

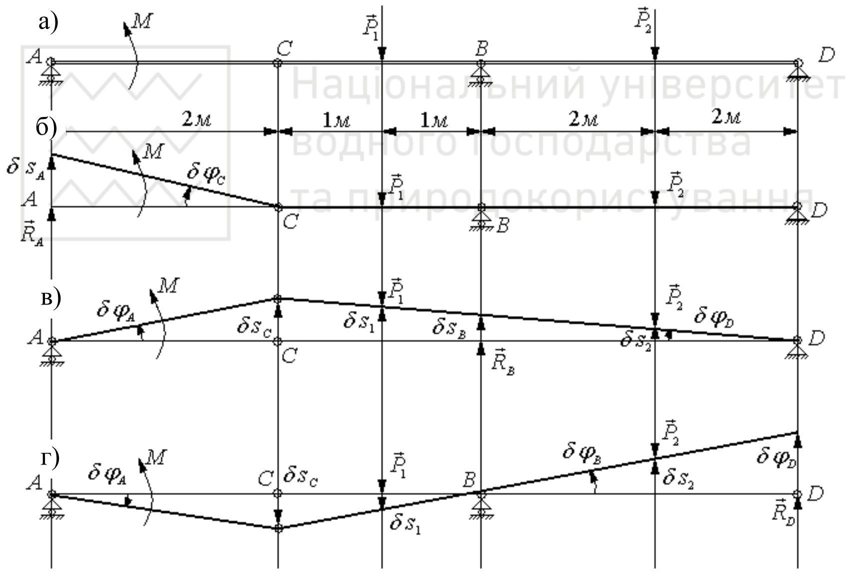


Рис. 7.4

Складемо рівняння (1):

$$R_A \cdot \delta s_A - M \cdot \delta\varphi_C = 0\,.$$

Оскільки $\delta s_A = 2\delta\varphi_C$, то $R_A \cdot 2\delta\varphi_C - M \cdot \delta\varphi_C = 0$ і

$\delta\varphi_C (2R_A - M) = 0\,.$

Відомо, що $\delta\varphi_C \neq 0$, *тоді* $2R_A - M = 0$. Знаходимо R_A:

$$R_A = \frac{M}{2} = \frac{4}{2} = 2кН.$$

Визначимо R_B.

Для цього умовно відкидаємо опору B і замінюємо дію опори на балку реакцією $\vec{R}_B$ (рис. 7.4, в).

Надаємо можливе переміщення балці. Складаємо рівняння (1):

$$M \cdot \delta\varphi_A - P_1 \cdot \delta s_1 + R_B \cdot \delta s_B - P_2 \cdot \delta s_2 = 0.$$

З рис. 7.4, в видно, що:

$$\begin{cases} \delta s_2 = 2 \cdot \delta\varphi_D, \quad \delta s_B = 4 \cdot \delta\varphi_D, \quad \delta s_1 = 5 \cdot \delta\varphi_D, \\ \delta s_C = 6 \cdot \delta\varphi_D, \; \delta\varphi_A = \dfrac{\delta s_C}{2} = \dfrac{6\delta\varphi_D}{2} = 3\delta\varphi_D. \end{cases}$$

Отже

$$3M \cdot \delta\varphi_D - P_1 \cdot 5 \cdot \delta\varphi_D + R_B \cdot 4 \cdot \delta\varphi_D - P_2 \cdot 2\delta\varphi_D = 0,$$

$$\delta\varphi_D(3M - 5P_1 + 4R_B - 2P_2) = 0.$$

Оскільки $\delta\varphi_D \neq 0$, то:

$$3M - 5P_1 + 4R_B - 2P_2 = 0.$$

Визначимо R_B :

$$R_B = \frac{-3M + 5P_1 + P_2}{4} = \frac{-3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 6}{4} = 2{,}5\,(кН).$$

Визначимо R_D. Оскільки на балку діє система паралельних сил, то напрямок реакції в'язі в точці D відомий.

Умовно відкидаємо опору D і замінюємо дію опори на балку реакцією R_D (рис. 7.4, г).

Надаємо балці можливе переміщення. Складаємо рівняння (1):

$$M \cdot \delta\varphi_A + P_1 \cdot \delta S_1 - P_2 \cdot \delta S_2 + R_D \cdot \delta S_D = 0.$$

З рисунка 7.4, г видно, що:

$$\begin{cases} \delta S_D = 4\delta\varphi_B, \quad \delta S_2 = \delta s_C = 2\delta\varphi_B, \quad \delta S_1 = 1 \cdot \delta\varphi_B, \\ \delta\varphi_A = \dfrac{\delta s_C}{2} = \dfrac{2\delta\varphi_B}{2} = \delta\varphi_B. \end{cases}$$

$$-M\delta\varphi_B + P_1\delta\varphi_B - P_2\cdot 2\delta\varphi_B + R_D\cdot 4\delta\varphi_B = 0,$$

Отже

$$\delta\varphi_B\left(-M + P_1 - 2P_2 + 4R_D\right) = 0.$$

$\delta\varphi_B \neq 0$. Прирівнявши вираз в дужках до нуля, визначимо R_D:

$$R_D = \frac{M - P_1 + 2P_2}{4} = \frac{4 - 2 + 2\cdot 6}{4} = 3{,}5\ (кН).$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій, склавши рівняння статики $\sum_{k=1}^{n} m_C\left(\vec{F}_K\right) = 0$ (рис. 7.5).

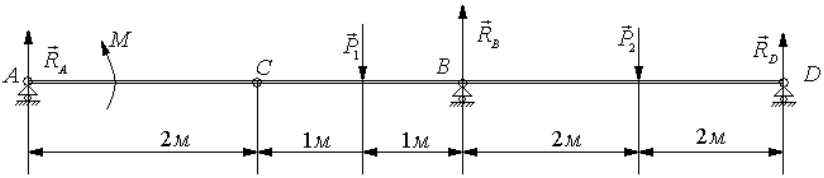


Рис. 7.5

Отже $-R_A\cdot 2 + M - P_1\cdot 1 + R_B\cdot 2 - P_2\cdot 4 + R_D\cdot 6 = 0$;

$$-2\cdot 2 + 4 - 2\cdot 1 + 2{,}5\cdot 2 - 6\cdot 4 + 3{,}5\cdot 6 = 0\ .$$

Опорні реакції визначено правильно.

Відповідь: $R_A = 2кН$, $R_B = 2{,}5кН$, $R_D = 3{,}5кН$.

<u>Задача 5.</u> Знайти вагу P_1 *і* P_2 (рис. 7.6) двох вантажів, які утримуються в рівновазі вантажем P на площинах α і β, якщо вантажі P_1 *і* P_2 закріплені до кінців троса, який з'єднує вантаж P_1 через блок O_1, що встановлений на горизонтальну вісь, до рухомого блока O, що несе вантаж P, і потім через блок O_2, що закріплений до осі блока O_1, до вантажу P_2.

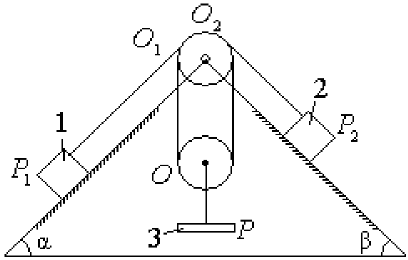


Рис. 7.6

Тертям, а також масами блоків і троса знехтувати.

Розв'язання. Механічна система має два ступені вільності. Вибираємо два лінійні незалежні можливі переміщення $\delta\vec{r}_1$ *і* $\delta\vec{r}_2$.

Зображуємо механічну систему і діючі активні сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}$ (рис. 7.6, а).

Задаємо можливим переміщенням вантажу P_1 – $\delta\vec{r}_1$. При цьому вантаж P_2 залишається в спокої, а блок O з вантажем P переміститься на $\delta\vec{r}_c = \delta\vec{r}_3$.

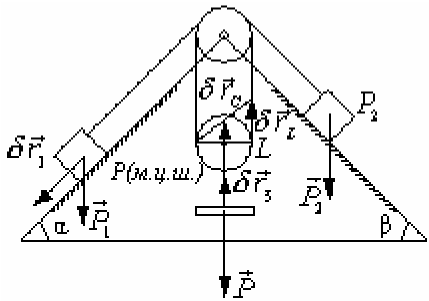


Рис. 7.6, а

Записуємо принцип можливих переміщень:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \tag{1}$$

Складемо рівняння (а):

$$P_1 \cdot \delta r_1 \sin\alpha - P \cdot \delta r_3 = 0. \tag{2}$$

Виразимо δr_3 через δr_1:

$$\delta r_3 = \delta r_C = \frac{\delta r_L}{2} = \frac{\delta r_1}{2}.$$

Отже
$$\delta r_3 = \frac{\delta r_1}{2}. \tag{3}$$

Підставимо (3) в (2):

$$P_1 \sin\alpha \cdot \delta r_1 - P \cdot \frac{\delta r_1}{2} = 0, \Rightarrow \delta r_1 \left(P_1 \sin\alpha - 0,5P\right) = 0.$$

Оскільки $\delta r_1 \neq 0$, то:

$$P_1 \sin\alpha - 0,5P = 0, \Rightarrow P_1 = \frac{0,5P}{\sin\alpha}.$$

Задаємося можливим переміщенням вантажу P_2 – $\delta\vec{r}_2$. При цьому вантаж P_1 залишається нерухомим, тобто $\delta\vec{r}_1 = 0$, а вантаж P переміститься на $\delta\vec{r}_2$ (рис. 7.6, б).

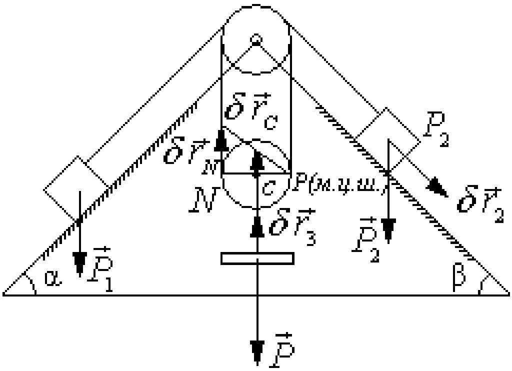


Рис. 7.6, б

Складемо рівняння (а):

$$P_2 \cdot \delta r_2 \cdot \sin\beta - P \cdot \delta r_3 = 0. \tag{4}$$

Виразимо δr_3 через δr_2:

$$\delta r_N = \delta r_2, \quad \delta r_C = \frac{\delta r_N}{2} = \frac{\delta r_2}{2}.$$

Отже
$$\delta r_3 = \delta r_C = \delta r_2. \tag{5}$$

Підставимо (5) в (4):

$$P_2 \cdot \delta r_2 \sin\beta - P \cdot \frac{\delta r_2}{2} = 0;$$
$$\delta r_2 (P_2 \sin\beta - 0{,}5P) = 0.$$

Оскільки $\delta r_2 \neq 0$, то $P_2 \sin\beta - 0{,}5P = 0$.

Отже $P_2 = \dfrac{0{,}5P}{\sin\beta}$.

Відповідь: $P_1 = \dfrac{0{,}5P}{\sin\alpha}$, $P_2 = \dfrac{0{,}5P}{\sin\beta}$.

8. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

8.1. Принцип Даламбера для матеріальної точки

Основне рівняння динаміки для невільної матеріальної точки $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$ можна записати у такому вигляді:

$$\vec{F} + \vec{R} + \left(-m\vec{a}\right) = 0 .$$

Останній член рівняння $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ є силою інерції. Сила інерції по модулю дорівнює добутку маси точки на її прискорення і напрямлена в протилежний бік від прискорення. Користуючись цим позначенням, запишемо рівняння у вигляді:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \qquad (8.1)$$

Для рухомої невільної матеріальної точки в кожний даний момент часу геометрична сума рівнодіючої активних сил, рівнодіючої реакції в'язей і сили інерції дорівнює нулю.

8.2. Принцип Даламбера для механічної системи

Якщо в будь-який момент часу до кожної із точок рухомої невільної механічної системи прикласти силу інерції, то геометрична сума головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції системи дорівнює нулю:

$$\vec{F}^* + \vec{R}^* + \vec{\Phi}^* = 0, \qquad (8.2)$$

і геометрична сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції відносно деякого нерухомого центра O дорівнює нулю:

$$\vec{M}_O^F + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = 0. \qquad (8.3)$$

8.3. Зведення сил інерції точок твердого тіла

В динаміці за центр зведення вибирається точка C – центр мас тіла.

Сили інерції точок твердого тіла зводяться до головного вектора сил інерції, що прикладений в центрі мас механічної системи $\vec{R}$ і головного моменту сил інерції механічної системи відносно центра мас:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}^* = -\sum m_k \vec{a}_k = -M\,\vec{a}_C, \\ \vec{M}_C^{\Phi} = -\sum \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k. \end{cases} \tag{8.4}$$

Частинні випадки:

а) поступальний рух.

При поступальному русі твердого тіла сили інерції точок твердого тіла зводяться до головного вектора сил інерції, який за напрямком протилежний прискоренню центра мас (рис. 8.1):

$$\overrightarrow{\Phi^*} = -M \cdot \overrightarrow{a_c}. \tag{8.5}$$

По модулю він рівний добутку маси тіла на прискорення центра мас:

$$\Phi^* = M\,a_c. \tag{8.6}$$

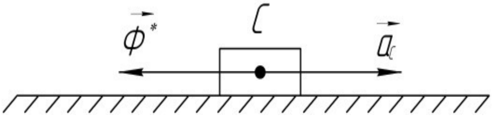


Рис. 8.1

б) обертальний рух твердого тіла.

Якщо тіло обертається навколо осі, яка проходить через центр мас тіла, а тіло має площину симетрії і вісь Cz перпендикулярна до цієї площини, то сили інерції точок тіла зводяться до головного моменту сил інерції, який за напрямком протилежний кутовому прискоренню тіла: $\vec{M}_C^{\Phi} = -I_z\vec{\varepsilon}$, а по величині рівний добутку моментa інерції тіла відносно осі обертання на величину кутового прискорення (рис. 8.2)

$$M_c^{\Phi} = I_z \cdot \varepsilon. \tag{8.7}$$

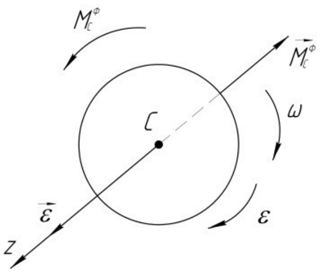


Рис. 8.2

в) плоскопаралельний рух твердого тіла.

Нехай тіло має площину матеріальної симетрії і рухається пара-

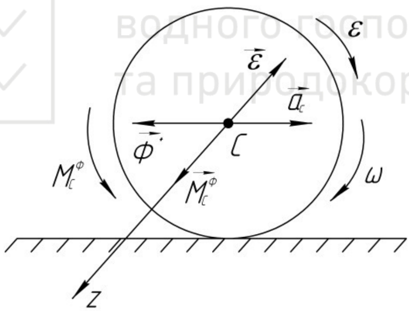


Рис. 8.3

лельно цій площині. Сили інерції точок тіла зводяться до головного вектора сил інерції $\vec{\Phi}^*$ і головного моменту сил інерції $\vec{M}_c^{\Phi}$ (рис. 8.3):

$$\begin{cases} \vec{\Phi}^* = -M \cdot \vec{a}_c, \\ \vec{M}_c^{\Phi} = -I_{z_c} \cdot \vec{\varepsilon}. \end{cases} \tag{8.8}$$

8.4. Загальне рівняння динаміки

При русі механічної системи з ідеальними двобічними в'язами в кожний даний момент часу сума елементарних робіт активних сил і сил інерції, прикладених до точок механічної системи, на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k+\vec{R}_k+\vec{\Phi}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k=0. \qquad (8.9)$$

В аналітичній формі рівняння має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(F_{kx}+R_{kx}+\Phi_{kx}\right)\delta x_k+\left(F_{ky}+R_{ky}+\Phi_{ky}\right)\delta y_k+\left(F_{kz}+R_{kz}+\Phi_{kz}\right)\delta z_k\right]=0\,. \qquad (8.10)$$

8.5. Питання для самоперевірки

1. Чому дорівнює сила інерції точки при її рівномірному прямолінійному русі?

2. Сформулюйте принцип Даламбера для матеріальної точки.

3. Сформулюйте принцип Даламбера для системи.

4. Чому дорівнює в будь-який момент часу геометрична сума головних векторів заданих сил. реакції в'язей і сил інерції матеріальних точок невільної механічної системи?

5. Чому дорівнює в будь-який момент часу геометрична сума моментів зовнішніх сил і сил інерції механічної системи відносно деякого центра?

6. Чому дорівнює геометрична сума всіх прикладених до точки активних сил. сил реакцій і сили інерції цієї точки?

7. За якою формулою визначається модуль дотичної сили інерції при нерівномірному криволінійному русі?

8. За якою формулою визначається модуль нормальної сили інерції при нерівномірному криволінійному русі?

9. Як напрямлений вектор дотичної сили інерції?

10. Як напрямлений вектор нормальної сили інерції?

11. При якому русі матеріальної точки дорівнює нулю її дотична сила інерції?

12. При якому русі матеріальної точки дорівнює нулю її нормальна сила інерції?

13. За якою формулою визначається модуль дотичної (обертальної) сили інерції точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?

14. За якою формулою визначається модуль нормальної (доцентрової) сили інерції точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?

15. Напишіть загальне рівняння динаміки.

16. Який вигляд прийме загальне рівняння динаміки, якщо механічна система знаходиться в рівновазі?

8.6. Порядок розв'язання задач, використовуючи принцип Даламбера

1. Зображаємо систему(точку) і активні сили, які діють на неї.
2. У випадку невільного руху, звільняємо систему (точку) від в'язей і замінюємо їх дію реакціями в'язей.
3. Умовно прикладаємо до системи (точки) сили інерції, а у випадку механічної системи – і моменти сил інерції.
4. Вибираємо систему координат.
5. Складаємо рівняння умовної рівноваги системи(точки), які відповідають принципу Даламбера.
6. Розв'язуючи отримані рівняння, визначаємо шукані величини.

8.7. Порядок розв'язання задач, використовуючи загальне рівняння динаміки

1. Робимо аналіз механічної системи та визначаємо число ступенів вільності системи.
2. Зображаємо систему і всі активні сили, які діють на систему. У випадку неідеальних в'язей (наприклад, сили тертя), напрямляємо реакції в'язей, і відносимо їх до заданих сил.
3. Робимо кінематичний аналіз та напрямляємо прискорення та кутові прискорення тіл системи. Напрямляємо головні вектори сили інерції і головні моменти сил інерції тіл системи.
4. Для механічної системи з одним ступенем вільності надаємо можливе переміщення одній із точок механічної системи і

виражаємо можливі переміщення точок прикладених всіх сил через це можливе переміщення.

5. Складаємо рівняння (8.9).

6. Визначаємо невідому величину.

Для механічної системи з двома ступенями вільності:

1. Вибрати два незалежні можливі переміщення.
2. Надати можливе переміщення механічній системі, яке відповідає зміні першого можливого переміщення.
3. Скласти загальне рівняння динаміки.
4. Надати можливе переміщення механічній системі , яке відповідає зміні другого можливого переміщення.
5. Скласти загальне рівняння динаміки.
6. Визначити з одержаної системи рівнянь невідомі величини.

8.8. Приклади розв'язання задач

Задача 1. Через блок маса якого m_3 (рис. 8.4) перекинута нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплені тягарці M_1 масою m_1 і M_2 масою m_2. Визначити прискорення тягарців і сили натягів ниток, якщо: $m_1 = 3m, m_2 = 6m, m_3 = 2m.$ Блок вважати однорідним диском.

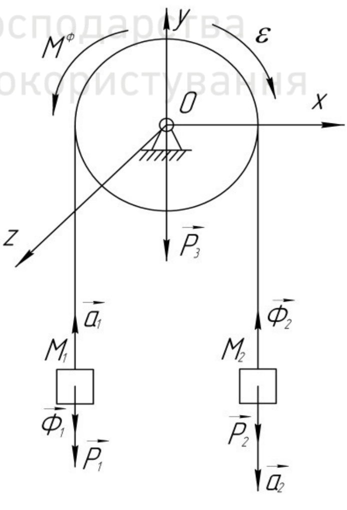


Рис. 8.4

Розв'язання:

Механічна система складається з блока, тягарців і нерозтяжної нитки. Прискорення тягарців: $a_1 = a_2 = a.$

Напрямляємо активні сили, які діють на систему: $\vec{P}_1; \vec{P}_2; \vec{P}_3.$

Прикладаємо сили інерції і момент сил інерції сил механічної системи: $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2$ і $M_\Phi.$ Виразимо Φ_1, Φ_2 і $M_\Phi.$ через a :

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = 3ma, \Phi_2 = m_2 a_2 = 6ma,$$

$$M_\Phi = I_z \varepsilon = \frac{m_3 r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{2mra}{2} = mra.$$

Складаємо рівняння:

$$M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi = 0.$$

$$P_1 \cdot r - P_2 \cdot r + \Phi_1 \cdot r + \Phi_2 \cdot r + M_\Phi = 0.$$

$$3mg - 6mg + 3ma + 6ma + ma = 0.$$

$$a = \frac{3g}{10} = 0.3g.$$

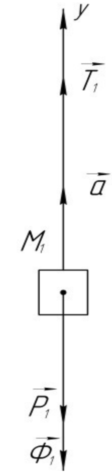


Рис. 8.5

Визначимо сили натягів нитки. Розглянемо умовну рівновагу тягарця M_1 (рис. 8.5) На тягар діє активна сила $\vec{P}_1$. Напрямляємо реакцію в'язі $\vec{T}_1$. Прикладаємо силу інерції $\vec{\Phi}_1$.

Принцип Даламбера для матеріальної точки:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0$$

Спроектуємо це рівняння на y:

$$-P_1 + T_1 - \Phi_1 = 0;$$

$$T_1 = P_1 + \Phi_1 = m_1 \cdot \mathrm{g} + m_1 \cdot a_1 =$$

$$3mg + 3m \cdot 0.3g = 3.9mg;$$

$$\mathrm{T}_1 = 3{,}9mg.$$

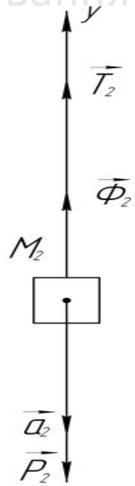


Рис. 8.6

Розглянемо умовну рівновагу тягарця M_2 (рис. 8.6).

На тягар діє активна сила $\vec{P}_2$. Напрямляємо реакцію в'язі $\vec{T}_2$. Прикладаємо силу інерції $\vec{\Phi}_2$.

Принцип Даламбера для матеріальної точки:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Спроектуємо це рівняння на вісь y:

$$-P_2 + T_2 + \Phi_2 = 0.$$

$$T_2 = 6mg - 6m \cdot 0.3g = 4.2mg.$$

<u>Задача 2.</u> Тягар A вагою Q, опускаючись вниз, приводить в рух, – за допомогою невагомої абсолютно гнучкої нерозтяжної нитки, перекинутої через блок B (вагою P_B), – каток D вагою P_D. Останній котиться без проковзування по горизонтальній площині. Вважаючи блок B і каток D однорідними дисками, визначити прискорення тягарця A, а також натяг нитки на обох ділянках, якщо:

$$P_B = 2P,\ P_D = 4P \quad \text{(рис. 8.7).}$$

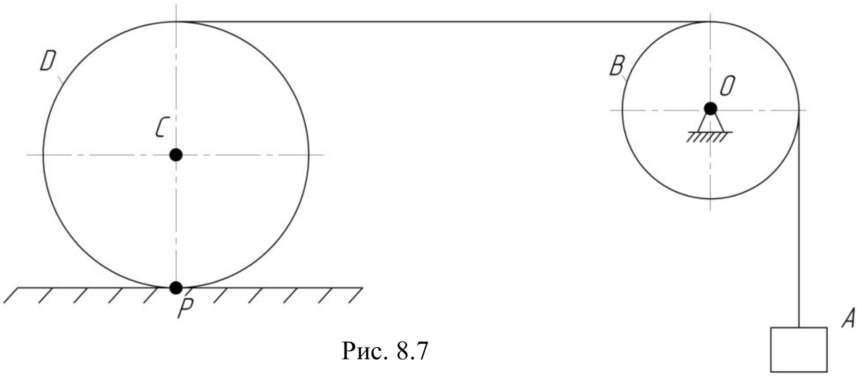


Рис. 8.7

Розв'язання

Розглядаємо умовну рівновагу тягарця A (рис. 8.8).

Напрямляємо активну силу $\vec{Q}$, яка діє на тягар. Напрямляємо реакцію в'язі $\vec{T}_1$.

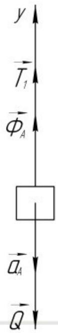


Рис. 8.8

Прикладаємо силу інерції $\vec{\Phi}_A$:

$$\Phi_A = m_A \cdot a_A = \frac{Q}{g} \cdot a_A.$$

Запишемо принцип Даламбера для матеріальної точки: $\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0$. Спроектуємо це рівняння на y:

$$T_1 + \Phi_A - Q = 0,$$

$$T_1 = Q - \frac{Q}{g} \cdot a_A. \quad (1)$$

Розглянемо умовну рівновагу блока B (рис. 8.9).

Напрямляємо активну силу $\vec{P}_B$, яка діє на блок. напрямляємо реакції в'язей: $\vec{X}_O, Y_O, \vec{T}_1', \vec{T}_2$; $T_1' = T_1$.

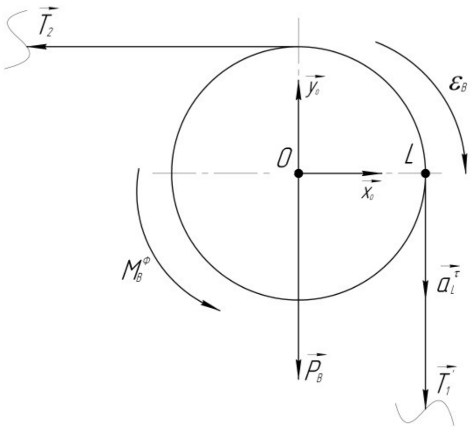


Рис. 8.9

Прикладаємо головний момент сил інерції M_{ϕ}^{B}. Виразимо M_{ϕ}^{B} через a_A:

$$M_B^{\Phi} = I_B^z \cdot \varepsilon_B = \frac{m_B \cdot r_B^2}{2} \cdot \frac{a_L^{\tau}}{r_B} = \frac{2P}{2g} \cdot r_B \cdot a_A = \frac{P \cdot r_B \cdot a_A}{g}.$$

Складаємо рівняння:

$$M_0^F + M_0^R + M_0^{\Phi} = 0,$$

$$T_2\, r_B - T_1'\, r_B + M_B^{\Phi} = 0,$$

$$T_2 - T_1 + \frac{P\, a_A}{g} = 0.$$

Розглянемо умовну рівновагу катка D (рис. 8.10).

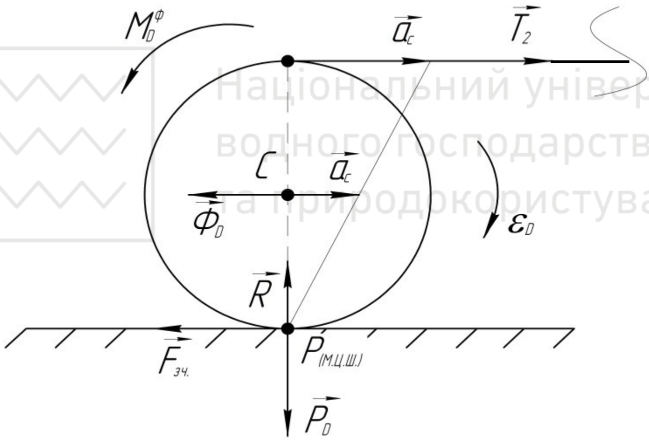


Рис. 8.10

Напрямляємо зовнішні сили, які діють на коток: $\vec{P}_D, \vec{T}_2$, $\vec{F}_{зч}$, $\vec{R}$; $T_2' = T_2$. Прикладаємо головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції M_D^{Φ}.

Виразимо Φ_D і M_D^{Φ} через a_A:

$$\Phi_D = m_D \cdot a_C = \frac{4P}{g} \cdot a_C;$$

$$M_D^{\Phi} = I_{Z_C}^D \cdot \varepsilon_D = \frac{4P \cdot r_D^2}{2g} \cdot \varepsilon_D = \frac{2P \cdot r_D^2}{g} \cdot \varepsilon_D.$$

Відомо, що:

$$\frac{a_N}{NP} = \frac{a_C}{CP} = \varepsilon_D; \qquad a_N = a_A;$$

$$a_C = \frac{a_A \cdot CP}{NP} = \frac{a_A}{2}; \qquad \varepsilon_D = \frac{a_N}{NP} = \frac{a_A}{2r_D}.$$

Тоді

$$\Phi_D = \frac{4P}{g} \cdot \frac{a_A}{2} = \frac{2P \cdot a_A}{g};$$

$$M_D^{\Phi} = \frac{2P \cdot r_D^2}{g} \cdot \frac{a_A}{2r_D} = \frac{P \cdot r_D \cdot a_A}{g}.$$

Складемо рівняння:

$$M_P^F + M_P^R + M_P^{\Phi} = 0,$$

$$-T_2' \cdot 2r_D - \Phi_D r_D + M_D^{\Phi} = 0,$$

$$-2T_2 + \frac{2P\,a_A}{g} + \frac{P\,a_A}{g} = 0,$$

$$T_2 = 1.5\,\frac{P\,a_A}{g}.$$

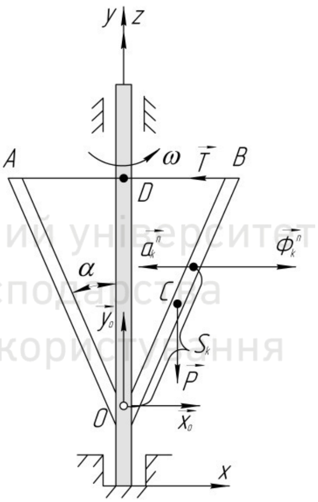


Рис. 8.11

Підставимо (1) і (3) в (2):

$$1.5\,\frac{P \cdot a_A}{g} - Q + \frac{Q \cdot a_A}{g} + \frac{P \cdot a_A}{g} = 0. \quad \text{Отже: } a_A = \frac{Q\,g}{2.5P + Q}$$

Визначимо натяги ниток:

$$T_1 = Q - \frac{Q}{g} \cdot \frac{Q \cdot g}{2.5P + Q} = Q\left[1 - \frac{Q}{2.5P + Q}\right],$$

$$T_2 = 1.5 \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{Q \cdot g}{2.5P + Q} = 1.5\,\frac{P \cdot Q}{2.5P + Q}.$$

Відповідь: $Q_A = \dfrac{Q\,g}{2{,}5P + Q}$.

<u>Задача 3.</u> Два однорідні стержні OA і OB, масою m кожний, прикріплені кінцями за допомогою шарніра O до вертикального стержня OD (рис. 8.11), а їх кінці A і B зв'язані нерозтяжними нитками в точці D вертикального стержня. Стержні обертаються рівномірно з кутовою швидкістю ω навколо вертикального стержня OD. Визначити натяг нитки і реакцію шарніра O, прикладену до стержня OB, якщо: $OA = OB = l$ і $\angle\, DBO = \alpha$.

Розв'язання

Розглянемо умовну рівновагу стержня OB. Напрямляємо активну активну силу $\vec{P}$. Напрямляємо реакції в'язей: $\vec{T}, \vec{x}_0, \vec{y}_0$. Розбиваємо стержень стержень OB на нескінченно малі елементи масою m_k: $m_k = A \cdot \rho \cdot dS_k$, де ρ – густина, A – площа поперечного перерізу, $a_k^n = \omega^2 JL \sin\alpha$.

До кожного елементу прикладемо силу інерції $\vec{\Phi}_k^n$:

$$\Phi_k^n = m_k\, \omega^2 S_k\, \sin\alpha = A\,\rho\,\omega^2\, \sin\alpha\, S_k\, dS_k.$$

Складемо рівняння:

$$\begin{cases} F_x + R_x + \Phi_x = 0; \\ F_y + R_y + \Phi_y = 0; \\ M_0^F + M_0^R + M_0^\Phi = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 - T + \int\limits_0^\ell A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot S_k \cdot dS_k = 0; \\ y_0 - P = 0; \\ T \cdot \ell \cdot \cos\alpha - P \cdot \dfrac{\ell}{2} \cdot \sin\alpha - \int\limits_0^\ell A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot S^2{}_k \cdot dS_k = 0. \end{cases}$$

Маса стержня: $m = AJL$.

Розвязуємо систему рівнянь:

$y_o = P = mg$;

$$T\,l\cos\alpha - P\frac{L}{2}\sin\alpha - Aj\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\frac{l^2}{3} = 0;$$

$$T = \frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{m}{3}l\omega^2\sin\alpha;$$

$$x_0 = T - m\omega^2\,\frac{l}{2}C = \frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha - \frac{ml\omega^2\sin\alpha}{G} =$$

$$= \frac{m}{2}(g\,\operatorname{tg}\alpha - \frac{l\omega^2\sin\alpha}{3}).$$

Відповідь: $\begin{cases} y_o = m\,g; \\ x_0 = \dfrac{m}{2}(g\,\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{l\omega^2}{3}\sin\alpha). \end{cases}$

<u>Задача 4.</u> Тягар A вагою Q, який підвішений на невагомій нерозтяжній нитці, перекинутій через невагомий блок D і намотаний на шків B радіусом R (рис. 8.12), приводить жорстко зв'язаний із шківом вал радіусом r, що котиться без проковзування по горизонтальній решітці. Вага шківа з валом P, радіус інерції відносно центральної осі ρ . Визначити прискорення тягарця.

Розв'язання

Механічна система складається з тягарця A, блока, шківа з валом і нерозтяжної нитки. Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему: $\vec{Q}$, $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{F}_{зч}$. Прикладаємо сили інерції $\vec{\Phi}_A$, $\vec{\Phi}_B$ і момент сил інерції M_B^{Φ}. Надаємо механічній системі можливе переміщення. Складаємо загальне рівняння динаміки:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k = 0.$$

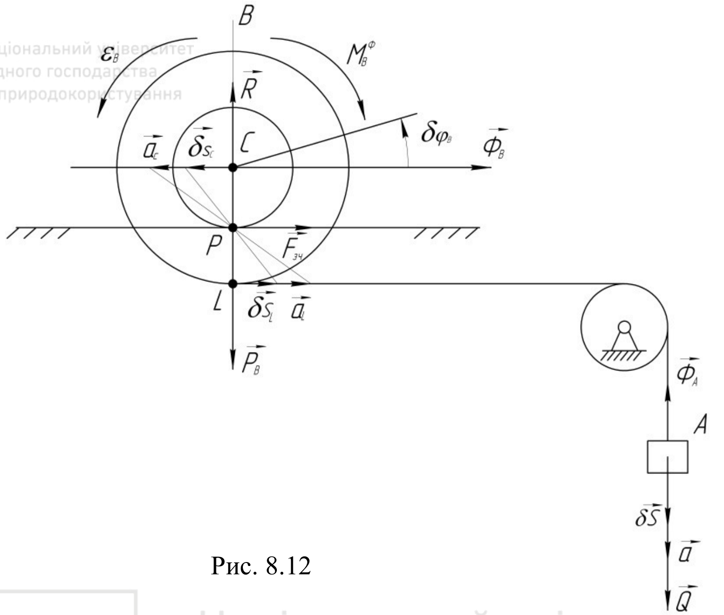


Рис. 8.12

Отже

$$Q\delta S - \Phi_A \delta S - \Phi_B \delta S_C - M_B^\Phi \delta\varphi_B = 0. \qquad (1)$$

Виразимо δS_C і $\delta\varphi_B$ через δS:

$$\delta S_L = \delta S,$$

$$\frac{\delta S_L}{LP} = \frac{\delta S_C}{CP} = \delta S_B;$$

$$\delta S_C = \frac{\delta S_L \cdot CP}{LP}; \qquad \delta\varphi_B = \frac{\delta S_L}{LP}.$$

Отримали

$$\delta S_C = \frac{r \cdot \delta S}{R - r}, \qquad \delta\varphi_B = \frac{\delta S}{R - r}. \qquad (2)$$

Підставимо δS_C і $\delta\varphi_B$ в (1):

$$Q \cdot \delta S - \Phi_A \cdot \delta S - \Phi_B \cdot \frac{r}{R-r}\delta S - M_B^\Phi \cdot \frac{\delta S}{R-r} = 0,$$

$$\delta S\left(Q - \Phi_A - \Phi_B \cdot \frac{r}{R-r} - \frac{M_B^\Phi}{R-r}\right) = 0.$$

Оскільки $\delta S \neq 0$, то прирівнюємо вираз в дужках до нуля:

$$Q - \Phi_A - \frac{r}{R-r} \cdot \Phi_B - \frac{1}{R-r} \cdot M_B^{\Phi} = 0\,. \qquad (3)$$

Виразимо Φ_A, Φ_B і M_B^{Φ} через a:

$$\Phi_A = \frac{Q}{g} \cdot a, \quad \Phi_B = \frac{P}{g} \cdot a_C, M_B^{\Phi} = I_{Z_C}^{B} \cdot \varepsilon_B.$$

З кінематики відомо, що: $\dfrac{a_L}{LP} = \dfrac{a_C}{CP} = \varepsilon_B$.

Отже

$$a_C = \frac{a_L CP}{LP} = a\frac{r}{R-r}, \quad \varepsilon_B = \frac{a_L}{LP} = \frac{a}{R-r}\,.$$

Тоді

$$\Phi_A = Q \cdot \frac{a}{g}, \quad \Phi_B = P \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{r}{R-r}, \quad M_B^{\Phi} = P \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{\rho^2}{R-r}\,. \qquad (4)$$

Підставивши (4) в (3), визначимо a:

$$Q - Q \cdot \frac{a}{g} - P \cdot \left(\frac{r}{R-r}\right)^2 \frac{a}{g} - P \cdot \frac{\rho^2}{(R-r)^2} \cdot \frac{a}{g} = 0,$$

$$a = \frac{Q(R-r)^2}{Q(R-r)^2 + P\left(r^2 + \rho^2\right)} g.$$

Відповідь: $a = \dfrac{Qg(R-r)^2}{Q(R-r)^2 + P(r^2 + \rho(r^2 + \rho^2)}\,.$

<u>Задача 5.</u> Механічна система, яка складається з двох катків однакової ваги Q і бруска вагою P (рис. 8.13), який лежить на катках, приводиться в рух сталим моментом M, прикладеним до катка B. Визначити прискорення бруска, якщо катки вважати однорідними дисками радіусом r кожний.

Розв'язання

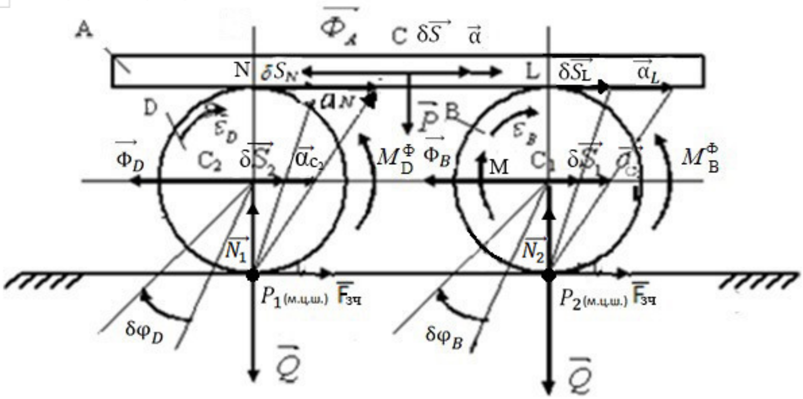


Рис. 8.13

Механічна система, на яку накладені ідеальні в'язі, складається з дисків і бруска.

Напрямляємо активні сили $\vec{P}$, $\vec{Q}$, які діють на систему. Прикладаємо сили інерції $\vec{\Phi}_A$, $\vec{\Phi}_B$, $\vec{\Phi}_D$, а також моменти сил інерції M_B^{Φ}, M_D^{Φ}. Надаємо механічній системі можливе переміщення. Складаємо загальне рівняння для механічної системи, на яку накладені ідеальні в'язі:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k+\vec{\Phi}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k=0 .$$

Отже

$$M\cdot\delta\varphi_B-\Phi_A\cdot\delta S-\Phi_B\cdot\delta S_1-\Phi_D\cdot\delta S_2-M_B^{\Phi}\cdot\delta\varphi_B-M_D^{\Phi}\cdot\delta\varphi_D=0 .\quad(1)$$

Виразимо $\delta\varphi_B, \delta S_1, \delta S_2, \delta\varphi_B, \delta\varphi_D$ через δS.

Оскільки брусок виконує поступальний рух, то:

$$\delta S_L=\delta S_N=\delta S,\quad \delta S_1=\delta S_2=\frac{\delta S}{2},$$
$$\delta\varphi_B=\delta\varphi_D=\frac{\delta S_1}{C_1P_1}=\frac{\delta S}{2r}.\quad(2)$$

Підставимо (2) в (1):

$$M\cdot\frac{\delta S}{2r}-\Phi_A\cdot\delta S-\Phi_B\cdot\frac{\delta S}{2}-\Phi_D\cdot\frac{\delta S}{2}-M_B^{\Phi}\cdot\frac{\delta S}{2r}-M_D^{\Phi}\cdot\frac{\delta S}{2r}=0,$$

$$\delta S\cdot\left(\frac{M}{2r}-\Phi_A-\frac{1}{2}\Phi_B-\frac{1}{2}\Phi_D-\frac{1}{2r}M_B^{\Phi}-\frac{1}{2r}M_D^{\Phi}\right)=0.$$

Оскільки $\delta S\neq 0,$ то прирівнюємо вираз в дужках до нуля:

$$\frac{M}{2r}-\Phi_A-\frac{1}{2}\Phi_B-\frac{1}{2}\Phi_D-\frac{1}{2r}M_B^{\Phi}-\frac{1}{2r}M_D^{\Phi}=0. \qquad (3)$$

Виразимо Φ_A, Φ_B, Φ_D, M_B^{Φ}, M_D^{Φ} через a_A.

Оскільки $a=a_L=a_N$, то $a_1=a_2=\frac{a}{2}$, $\varepsilon_B=\varepsilon_D=\frac{a_1}{CP_1}=\frac{a}{2r}$.

$$\Phi_A=m_Aa=P\frac{a}{g},\ \ \Phi_D=\Phi_B=m_Ba_1=\frac{Q}{2}\cdot\frac{a}{g},$$

$$M_D^{\Phi}=M_B^{\Phi}=I_{Bz}\varepsilon_B=\frac{Qr^2}{2g}\cdot\frac{a}{2r}=\frac{Qra}{4g}.$$

Підставивши (4) в (3), визначимо прискорення бруска:

$$\frac{M}{2r}-P\frac{a}{g}-\frac{1}{4}Q\frac{a}{g}-\frac{1}{4}Q\frac{a}{g}-\frac{1}{8r}Qr\frac{a}{g}-\frac{1}{8r}Qr\frac{a}{g}=0,$$

$$a=\frac{2M/r}{2P+3Q}g.$$

<u>Задача 6.</u> Регулятор обертається рівномірно навколо осі Oy (рис. 8.14). Довжина плеч регулятора $O_1A=DA=O_2B=BD=\ell$, $OO_1=OO_2=b$. Визначити кутову швидкість регулятора в залежності від кута φ відхилення плеч, якщо: P – вага кожної із куль, Q – вага муфти, C – жорсткість пружини. При $\varphi=0$ пружина не розтягнута і не стиснута.

Розв'язання

Механічна система складається з двох куль, муфти, плеч. Напрямляємо активні сили, які діють на систему і силу пружності пружини.

$$F_{пр.}=c\cdot\lambda=c\cdot(2\ell-2\ell\cdot\cos\varphi)=2\ell\cdot c\cdot(1-\cos\varphi).$$

Прикладаємо сили інерції Φ_A і Φ_B.

Запишемо загальне рівняння динаміки в аналітичній формі:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(F_{kx}+R_{kx}+\Phi_{kx}\right)\cdot\delta x_k+\left(F_{ky}+R_{ky}+\Phi_{ky}\right)\cdot\delta y_k\right]=0\,. \qquad (1)$$

Складемо рівняння (1):

$$2P\cdot\delta y_A+Q\cdot\delta y_D+\Phi_A\cdot\delta x_A-\Phi_B\cdot\delta x_B+F_{np}\cdot\delta y_D=0\,. \qquad (2)$$

Визначимо координати точок прикладання сил:

$x_A=b+\ell\sin\varphi,\quad x_B=-b-\ell\sin\varphi,$

$y_A=y_B=\ell\cos\varphi,\quad y_D=2\ell\cos\varphi\,.$

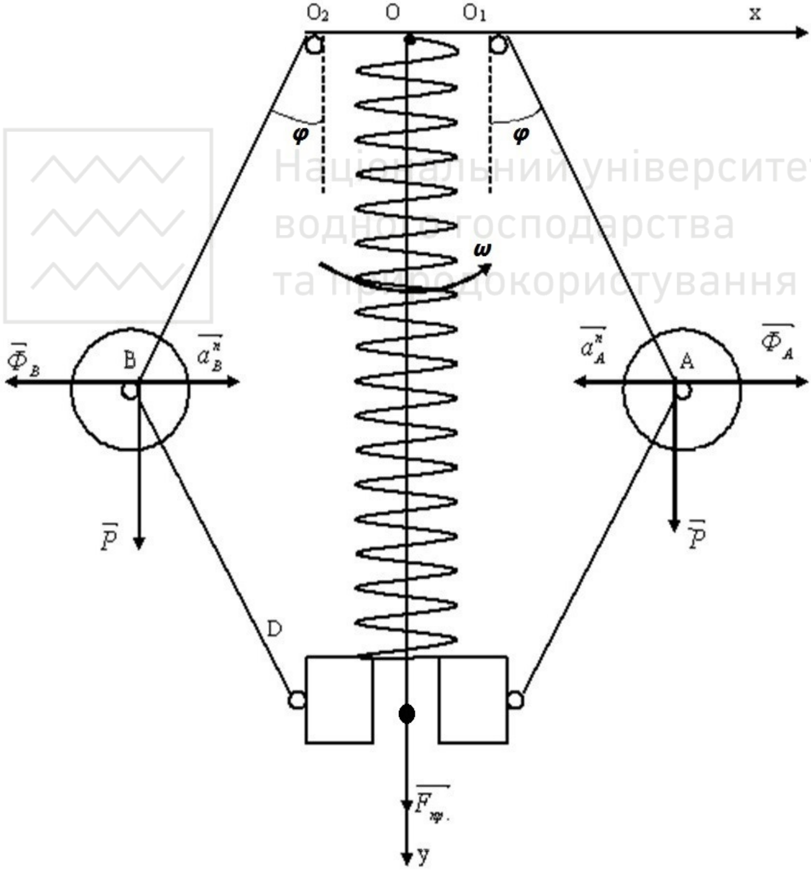


Рис. 8.14

Тоді

$$\delta x_A = \ell\cos\varphi\cdot\delta\varphi, \quad \delta x_B = -\ell\cos\varphi\cdot\delta\varphi,$$
$$\delta y_A = \delta y_B = -\ell\sin\varphi\cdot\delta\varphi, \qquad \delta y_D = -2\ell\sin\varphi\cdot\delta\varphi. \tag{3}$$

Підставимо (3) в (2):

$$\delta\varphi\left[-2P\ell\sin\varphi - Q2\ell\sin\varphi + \Phi_A\ell\cos\varphi + \Phi_B\ell\cos\varphi - F_{np}2\ell\sin\varphi\right] = 0.$$

Оскільки $\delta\varphi \neq 0$, то прирівнюємо вираз в дужках до нуля:

$$-2P\ell\sin\varphi - Q\cdot 2\ell\sin\varphi + \Phi_A\ell\cos\varphi + \Phi_B\ell\cos\varphi - F_{np}\cdot 2\ell\sin\varphi = 0. \tag{4}$$

Виразимо Φ_A і Φ_B через ω:

Оскільки кулі A і B на однаковій віддалі від осі обертання, то:

$$\Phi_A = \Phi_B = \frac{P}{g}a_A^n = \frac{P}{g}\omega^2\left(b + \ell\sin\varphi\right). \tag{5}$$

Підставивши (5) в (6), визначимо ω:

$$-2P\sin\varphi - Q\sin\varphi + \frac{P}{g}\omega^2\left(b + \ell\sin\varphi\right)\cos\varphi - 2\ell c\left(1 - \cos\varphi\right)\sin\varphi = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\left[P + Q + 2\ell c\left(1 - \cos\varphi\right)\right]\ tg\varphi}{P\cdot\left(b + \ell\sin\varphi\right)}}.$$

Відповідь: $$\omega = \sqrt{\frac{g\left[P + Q + 2\ell c\left(1 - \cos\varphi\right)\right]\ tg\varphi}{P\cdot\left(b + \ell\sin\varphi\right)}}.$$

<u>Задача 7.</u> Два вантажі D і E вагою P кожний прив'язані до кінців нерозтяжної і невагомої нитки (рис. 8.15, а). Ця нитка від вантажу E проходить через блок A, потім охоплює рухомий блок B, повертається вгору на нерухомий блок C, співвісний з блоком A, проходить паралельно до гладкої похилої площини, де до кінця нитки прив'язаний вантаж D. Похила площина утворює кут α з горизонтом. До осі рухомого блока прив'язаний вантаж K вагою Q. Горизонтальна площина шорстка, коефіцієнт тертя ковзання f. Визначити прискорення вантажу K. Масами блоків знехтувати.

Розв'язання

Механічна система складається з вантажів, блоків і нерозтяжної нитки. Механічна система має два ступені вільності. Вибираємо два незалежні можливі переміщення: $\delta S_E, \delta S_D$. Надаємо спочатку можливе переміщення вантажу E – δS_E, закріпивши умовно вантаж D (рис. 8.15, б).

Напрямляємо активні сили $\vec{P}$, $\vec{Q}$ і реакції в'язей $\vec{F}_{mp}$, $\vec{R}$. Прикладаємо сили інерції $\vec{\Phi}_{\mathrm{E}}$ і $\vec{\Phi}_{\mathrm{k}}$:

$$\Phi_E = P\frac{a_E}{g}, \quad \Phi_K = Q\frac{a_K}{g}.$$

Складаємо загальне рівняння динаміки:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k\right)\cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

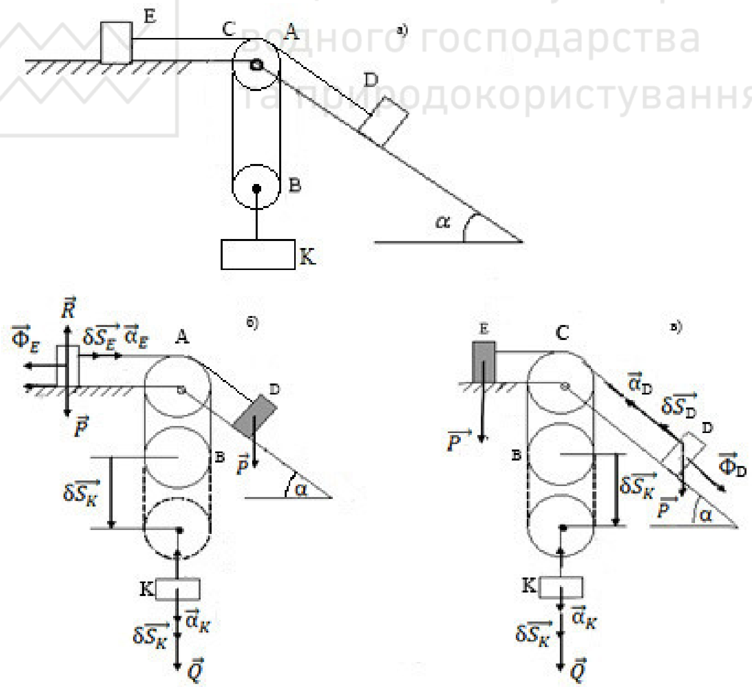


Рис. 8.15

Отже

$$Q\delta S_K - F_{mp}\delta S_E - \Phi_K \delta S_K - \Phi_E \delta S_E = 0\,. \qquad (2)$$

Вантаж D умовно нерухомий, тоді:

$$\delta S_K = \frac{\delta S_E}{2}\ . \qquad (3)$$

Підставивши (3) в (2) одержимо:

$$\delta S_E \cdot \left(\frac{1}{2} Q - F_{mp} - \frac{1}{2}\Phi_K - \Phi_E \right) = 0.$$

Оскільки $\delta S_E \neq 0,$ то $\frac{1}{2} Q - F_{mp} - \frac{1}{2}\Phi_K - \Phi_E = 0$. (4)

Підставивши (1) в (4), одержимо:

$$0{,}5Q - f\,P - 0{,}5Q\frac{a_K}{g} - P\frac{a_E}{g} = 0\,. \qquad (5)$$

Надаємо вантажу D можливе переміщення (рис. 8.15, в) δS_D.
Складемо загальне рівняння динаміки:

$$Q \cdot \delta S_K - P \cdot \delta S_D \cdot \sin\alpha - \varPhi_K \cdot \delta S_K - \varPhi_D \cdot \delta S_D = 0$$

Оскільки $\delta S_K = \frac{\delta S_D}{2},$ то :

$$\delta S_D \cdot \left(0{,}5Q - P \cdot \sin\alpha - 0{,}5\varPhi_K - \varPhi_D\right) = 0, \qquad \delta S_D \neq 0.$$

Тоді

$$0{,}5Q - P \cdot \sin\alpha - 0{,}5\varPhi_K - \varPhi_D = 0.$$

Оскільки $\varPhi_D = P\,\frac{a_D}{g}, \quad \varPhi_K = Q\,\frac{a_K}{g},$ то:

$$0{,}5Q - P\sin\alpha - 0{,}5Q\frac{a_K}{g} - P\frac{a_D}{g} = 0\,. \qquad (6)$$

Розглянемо рух рухомого блоку (рис. 8.16).

Відомо, що: $a_L = a_E$, $a_N = a_D$.

Прискорення осі блока рівне прискоренню тягарця K. З рисунка видно, що:

$$a_K = \frac{a_L + a_N}{2} = \frac{a_E + a_D}{2},$$

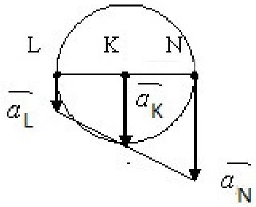


Рис. 8.16

звідки:

$$a_D = 2a_K - a_E . \tag{7}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (5), (6), (7), визначимо a_K :

$$a_K = \frac{Q - P(f + \sin\alpha)}{Q + 2P} .$$

Відповідь: $$a_K = \frac{Q - P(f + \sin\alpha)}{Q + 2P}$$

9. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

Узагальненими координатами механічної системи називаються незалежні параметри, які однозначно визначають положення механічної системи в будь-який момент часу. Узагальнені координати позначають $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Кількість незалежних узагальнених координат, які визначають

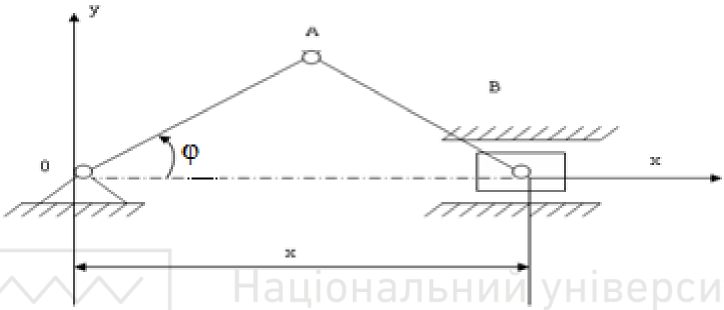


Рис. 9.1

положення механічної системи дорівнює числу ступенів вільності механічної системи.

Наприклад. Положення всіх точок кривошипно-шатунного механізму (рис. 9.1) визначається задаванням однієї величини: кута повороту кривошипа AO – φ або лінійним переміщенням повзуна B – x.

Отже за узагальнену координату можна вибрати $q = \varphi$, або $q = x$.

Кривошипно-повзунний механізм має одну ступінь вільності.

Для механічної системи, яка має κ ступенів вільності рівняння Лагранжа другого роду мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad \text{де} \quad k = 1,\ldots, S, \tag{9.1}$$

де T – кінетична енергія механічної системи, яка виражена через узагальнені координати і узагальнені швидкості: узагальнені швидкості рівні першим похідним по часу узагальнених координат $q_1,...,q_k$; $Q_1,...,Q_k$ – узагальнені сили.

Щоб визначити узагальнену силу Q_j, яка відповідає узагальненій координаті q_j, потрібно надати даній механічній системі таке можливе переміщення, при якому змінюється тільки узагальнена координата q_j, а всі інші узагальнені координати залишаються незмінними. Визначити суму елементарних робіт $\sum_{i=1}^{n}\delta A_{ji}$ всіх заданих сил на цьому можливому переміщенні і розділити цю суму на варіацію δq_j, тобто:

$$Q_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta A_{ji}}{\delta q_j}. \tag{9.2}$$

Якщо механічна система знаходиться під дією потенціальних сил, то узагальнені сили визначаються за формулами:

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \tag{9.3}$$

де U – силова функція, Π – потенціальна енергія системи, яка виражена через узагальнені координати цієї системи.

9.1. Питання для самопідготовки

1. Що називають узагальненими координатами механічної системи?
2. Чому дорівнює число ступенів вільності механічної системи?
3. В якому випадку декартові координати точок системи залежать не тільки від узагальнених координат, але й від часу?
4. Що називається узагальненою силою, яка відповідає деякій узагальненій координаті системи, яку вона має розмірність?
5. Якими формулами виражаються узагальнені сили через проекції на нерухомі осі декартових координат?
6. Як визначаються узагальнені сили у випадку, потенціальних сил?

7. Який вигляд мають рівняння Лагранжа II роду?

8. Чому дорівнює число рівнянь Лагранжа II роду для будь-якої механічної системи?

9. Через які змінні величини повинна бути виражена кінетична енергія механічної системи при складанні рівнянь Лагранжа II роду?

9.2. Порядок розв'язування задач

1. Визначити кількість ступенів вільності механічної системи.

2. Вибирати узагальнені координати.

3. Визначити узагальнені сили відповідно до вибраних узагальнених координат.

4. Визначити кінетичну енергію механічної системи, виразивши її через узагальнені координати і узагальнені швидкості.

5. Визначити частинні похідні кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j};\quad \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

6. Обчислити похідну за часом: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$.

7. Записати рівняння Лагранжа другого роду.

8. Знайдені в пунктах 3, 5, 6 результати підставити в рівняння Лагранжа другого роду.

9. Проінтегрувати складені рівняння і визначити сталі інтегрування з початкових умов задачі.

10. Дослідити розв'язок задачі.

9.3. Приклади розв'язування задач

<u>Задача</u> 1. Планетарна передача, яка розміщена в горизонтальній площині, приводиться в рух сталим моментом M, прикладеним до кривошипа OA (рис. 9.2). Зубчасте колесо 2 масою m_2, яке знаходиться в зчепленні з нерухомим зубчастим колесом 1, приводиться в рух кривошипом OA. Визначити кутове прискорення кривошипа, якщо його маса m_{OA}=0.5m_2. Кривошип OA довжиною l вважати однорідним стержнем, колесо 2 радіусом r вважати однорідним круглим диском.

Розв’язання

Механічна система, яка складається з кривошипа OA, коліс 1 і 2, має один ступінь вільності. За узагальнену координату вибираємо φ_{OA}. Рівняння Лагранжа другого роду має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{OA}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{OA}} = Q \ . \quad (1)$$

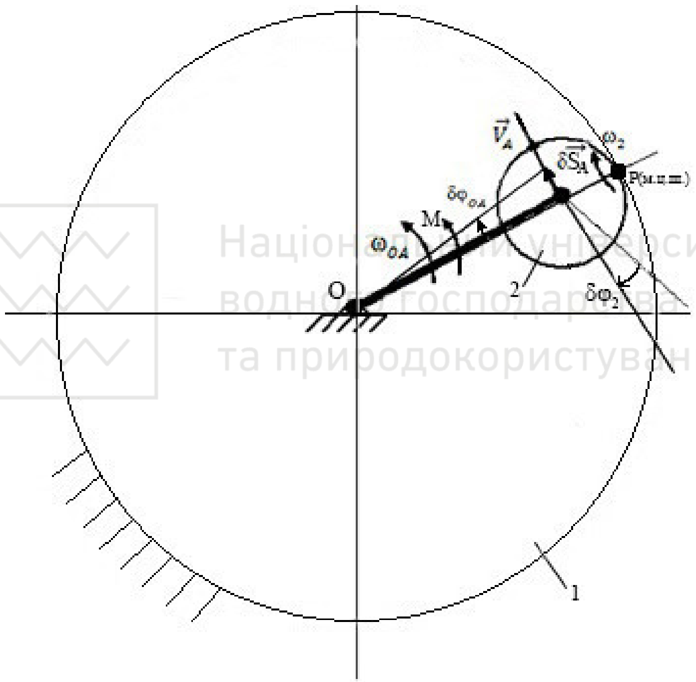


Рис. 9.2

Визначимо кінетичну енергію механічної системи, виразивши її через узагальнену швидкість $\dot{\varphi}_{OA}$:

$$T = T_{OA} + T_2 \ . \quad (2)$$

Кривошип OA виконує обертальний рух:

$$T_{OA}=\frac{I_Z^{OA}\omega_{OA}^2}{2}=\frac{m_{OA}l^2}{3}\cdot\frac{\omega_{OA}^2}{2}=$$

$$=\frac{0.5m_2l^2\dot{\varphi}_{OA}^2}{6}=\frac{m_2l^2\dot{\varphi}_{OA}^2}{12};$$

Колесо 2 виконує плоскопаралельний рух:

$$T_2=\frac{m_2V_A^2}{2}+\frac{I_{Z_A}^{(2)}\omega_2^2}{2};\quad V_A=\omega_{OA}OA=\dot{\varphi}_{OA}\,l;$$

$$\omega_2=\frac{V_A}{AP}=\frac{\dot{\varphi}_{OA}l}{r};\quad I_{Z_A}^{(2)}=\frac{m_2r^2}{2}.$$

Тоді

$$T_2=\frac{m_2}{2}\dot{\varphi}^2{}_{OA}l^2+\frac{1}{2}l\frac{m_2r^2}{2}\cdot\frac{\dot{\varphi}^2{}_{OA}l^2}{r^2}=\frac{3}{4}m_2l^2\dot{\varphi}_{OA}^2.$$

Підставивши T_{OA} і T_2 в (2), одержимо:

$$T=\frac{m_2\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}_{OA}^2}{12}+\frac{3}{4}\cdot m_2\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}_{OA}^2=\frac{5}{6}\cdot m_2\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}_{OA}^2.$$

Частинні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_{OA}}=0\ ,\tag{3}$$

бо T явно не залежить від φ_{OA}, $\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_{OA}}=\dfrac{5}{3}\cdot m_2\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}_{OA}$.

Визначимо $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_{OA}}\right)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_{OA}}\right)=\frac{5}{3}m_2\,l^2;\quad \varphi_{OA}=\frac{5}{3}m_2\,l^2\,\varepsilon_{OA}.\tag{4}$$

Визначимо узагальнену силу:

$$Q=\frac{\sum_{k=1}^{n}\delta A_{Fk}}{\delta\varphi_{OA}}=\frac{M\cdot\delta\varphi_{OA}}{\delta\varphi_{OA}}=M.\tag{5}$$

Підставивши (3), (4), (5) в (1), одержимо:

$$\frac{5}{3} \cdot m_2 \cdot \ell^2 \cdot \varepsilon_{OA} = M .$$

Отже: $\varepsilon_{OA} = \dfrac{3 \cdot M}{5m_2 \cdot \ell^2}$.

Відповідь: $\varepsilon_{OA} = \dfrac{3 \cdot M}{5m_2 \cdot \ell^2}$.

Задача 2. Вантаж A вагою Q, опускаючись вниз, за допомогою невагомої, нерозтяжної нитки, перекинутої через блок D вагою P і намотаний на барабан B радіусом r змушує колесо радіусом R котитися без проковзування по нахиленій під кутом α до горизонту рейці (рис. 9.3). Визначити прискорення вантажу, якщо вага колеса з барабаном $2P$, а радіус інерції відносно горизонтальної осі, яка проходить через точку O, рівний ρ і коефіцієнт тертя кочення δ. Блок D вважати однорідним диском.

Розв'язання

Механічна система, яка складається з вантажа, блока, барабана з колесом і нерозтяжної нитки, має один ступінь вільності.

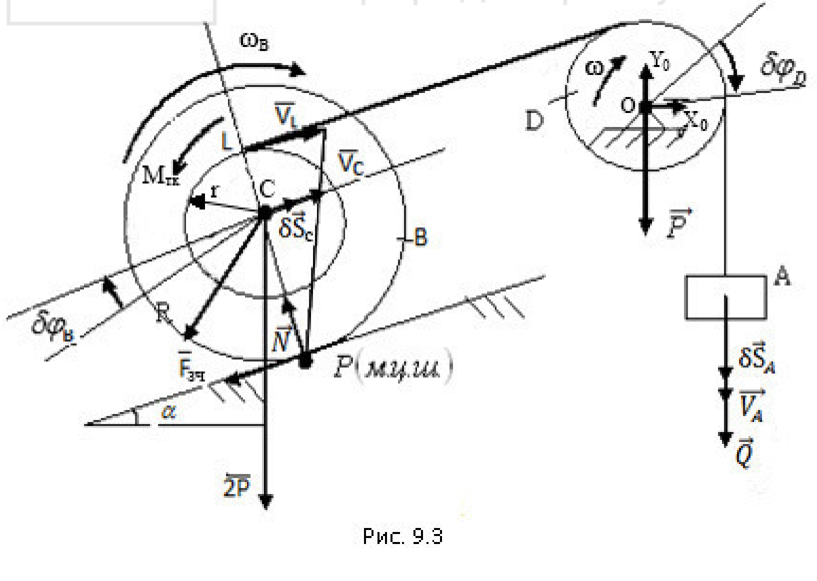


Рис. 9.3

За узагальнену координату виберемо лінійне переміщення вантажу S_A. Запишемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_A}\right)-\frac{\partial T}{\partial S_A}=Q_1 \qquad (1)$$

Виразимо кінетичну енергію механічної системи через узагальнену швидкість $\dot{S}_A=V_A$:

$$T=T_A+T_B+T_D\ . \qquad (2)$$

Тягар A виконує поступальний рух:

$$T_A=\frac{m_A V_A^2}{2}=\frac{QV_A^2}{2g}=\frac{Q\dot{S}_A^2}{2g}.$$

Блок D виконує обертальний рух:

$$T_D=\frac{I_z^D\omega_D^2}{2};\ I_Z^D=\frac{m_D r_D^{\ 2}}{2}=\frac{Pr_D^2}{2g};\ \omega_D=\frac{V_A}{r_D}=\frac{\dot{S}_A}{r_D}.$$

Тоді

$$T_D=\frac{Pr_D^2}{4g}\cdot\frac{\dot{S}_A^{\ 2}}{r_D^{\ 2}}=\frac{P\dot{S}_A^{\ 2}}{4g}.$$

Колесо з барабаном виконує плоскопаралельний рух:

$$T_B=\frac{m_B V_C^2}{2}+\frac{I_{Z_C}^B\omega_B^2}{2}=\frac{m_B V_C^2}{2}\left(1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right);$$

$$m_B=\frac{2P}{g};\qquad I_{Z_C}^B=m_B i_{BZ}^2=\frac{2P}{g}\cdot\rho^2;$$

$$\frac{V_L}{LP}=\frac{V_C}{CP}=\omega_B;\qquad V_L=V_A;$$

$$V_C=\frac{V_A\cdot R}{r+R}=\frac{\dot{S}_A\cdot R}{r+R};\qquad \omega_B=\frac{V_L}{LP}=\frac{\dot{S}_A}{r+R}.$$

Отже

$$T_B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\cdot\frac{\dot{S}_A^2\cdot R^2}{(r+R)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\cdot\rho^2\cdot\frac{\dot{S}_A^2}{(r+R)^2}=\frac{P\left(R^2+\rho^2\right)\cdot\dot{S}_A^2}{g(r+R)^2}.$$

Підставивши T_A, T_D і T_B в (1), одержимо:

$$T=\frac{Q\dot{S}_A^2}{2g}+\frac{P\dot{S}_A^2}{4g}+\frac{P\left(R^2+\rho^2\right)\dot{S}_A^2}{g(r+R)^2}=$$

$$=\frac{(4Q+P)(r+R)^2+4P\left(R^2+\rho^2\right)}{4g\cdot(r+R)^2}\dot{S}_A^2.$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial S_A}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_A}=\frac{(4Q+P)(r+R)^2+4P\left(R^2+\rho^2\right)}{2g\,(r+R)^2}\dot{S}_A\ . \qquad (3)$$

Обчислимо $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{S}_A}\right)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_A}\right)=\frac{(4Q+P)(r+R)^2+4P\left(R^2+\rho^2\right)}{2g\,(r+R)^2}\ddot{S}_A\,. \qquad (4)$$

Визначимо узагальнену силу:

$$Q_1=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\delta A_{Fk}}{\delta S_A}.$$

Напрямляємо зовнішні сили, які діють на механічну систему. Надаємо можливе переміщення. Тоді

$$Q_1=\frac{Q\,\delta S_A-P_B\delta S_C\sin\alpha-M_{т.к.}\delta\varphi_B}{\delta S_A}=$$

$$=\frac{Q\,\delta S_A-P_B\dfrac{R}{r+R}\delta S_A-\dfrac{M_{т.к.}}{r+R}\delta S_A}{\delta S_A}= \qquad (5)$$

$$=Q-2P\frac{R+\delta\cos\alpha}{r+R}.$$

Підставивши (3), (4), (5) в (1), визначимо прискорення:

$$a_A = \frac{2g\cdot(r+R)\cdot[Q\cdot(r+R)-2P\cdot(R+\delta\cdot\cos\alpha)]}{(4Q+P)\cdot(r+R)^2+4P\cdot\left(R^2+\rho^2\right)}.$$

***Відповідь*:**

$$a_A = \frac{2g\cdot(r+R)\cdot[Q\cdot(r+R)-2P\cdot(R+\delta\cdot\cos\alpha)]}{(4Q+P)\cdot(r+R)^2+4P\cdot\left(R^2+\rho^2\right)}.$$

<u>Задача 3.</u> Візок, маса якого 2m, може рухатись по горизонтальній площині. З двох сторін возика на осі, яка проходить через центр мас (рис. 9.4) вільно насаджені тонкі стержні довжиною ℓ, на кінці яких закріплені точкові тягарці масою m кожний. Нехтуючи масою коліс і стержнів, і вважаючи, що відхилення стержнів від вертикалі малі, визначити рух цієї системи. В початковий момент часу:

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0.$$

Розв'язання

Механічна система, яка складається з возика, двох стержнів і двох точкових тягарців, має два ступені вільності. Виберемо систему координат. За узагальнені координати виберемо абсцису x точки C і кут φ нахилу стержнів.

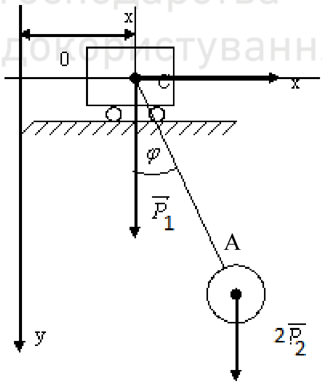


Рис. 9.4

Запишемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \end{cases}$$

Визначимо кінетичну енергію механічної системи:

$$T = T_1 + 2T_2. \tag{1}$$

Возик виконує поступальний рух:

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} = \frac{2m \cdot V_1^2}{2} = m \cdot \dot{x}^2. \tag{2}$$

Визначимо швидкість точкових тягарців: $V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$.

З рисунка видно, що: $x_2 = x + \ell \cdot \sin\varphi$, $y_2 = \ell \cdot \cos\varphi$.

Тоді:

$$\begin{aligned} V_2^2 &= \left(\dot{x} + \ell \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}\right)^2 + \ell^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \\ T_2 &= \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} = \frac{m \cdot \left[\left(\dot{x} + \ell\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}\right)^2 + \ell^2 \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2\right]}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Підставимо (2) і (3) в (1):

$$T = m \cdot \dot{x}^2 + m \cdot \left[\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}\ell\cos\varphi + \ell^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \ell^2\sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2\right]$$

Отже

$$T = 2m\dot{x}^2 + 2m\dot{x}\dot{\varphi}\ell\cos\varphi + m\ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

Визначимо частинні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 4m\dot{x} + 2m\dot{\varphi}\ell\cos\varphi. \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 2m\dot{x}\dot{\varphi}^2\ell\sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2m\dot{x}\ell\cos\varphi + 2m\ell^2\dot{\varphi}. \tag{6}$$

Визначимо похідні по часу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 4m\ddot{x} + 2m\ddot{\varphi}\ell\cos\varphi - 2m\dot{\varphi}^2\ell\sin\varphi, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2m\ddot{x}\ell\cos\varphi - 2m\dot{x}\dot{\varphi}\ell\sin\varphi + 2m\ell^2\ddot{\varphi}. \end{cases} \tag{7}$$

Добуток $\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \approx 0$ (нескінченно мала величина). При малих коливаннях $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$. Підставивши (5), (6), (7) у вихідні рівняння Лагранжа, одержимо:

$$\begin{cases} 4m\ddot{x} + 2m\ddot{\varphi}\ell = Q_x, \\ 2m\ddot{x}\ell + 2m\ell^2\ddot{\varphi} = Q_\varphi. \end{cases} \tag{8}$$

Визначимо узагальнені сили:

$$Q_x = P_1 \frac{\partial y_C}{\partial x} + 2P_2 \frac{\partial y_A}{\partial x},$$

$$Q_\varphi = P_1 \frac{\partial y_C}{\partial \varphi} + 2P_2 \frac{\partial y_A}{\partial \varphi}.$$

Оскільки $y_C = 0, \quad y_A = \ell \cos\varphi$, то:

$$Q_x = 0, \quad Q_\varphi = -2mg\ell \sin\varphi = -2mg\ell\varphi\,.$$

Підставимо Q_x і Q_φ у (8):

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + \ddot{\varphi}\,\ell = 0, \\ \ddot{x} + \ell\,\ddot{\varphi} + g\,\varphi = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Розв’язуємо систему рівнянь:

$$\ddot{x} = -0.5\ell\ddot{\varphi}, \quad 0.5\ell\ddot{\varphi} + g\varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{2g}{\ell}\varphi = 0\,. \tag{10}$$

Позначимо $k^2 = \dfrac{2g}{\ell}$, отже $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$ (11)

Загальний розв’язок цього рівняння:

$$\varphi = C_1 \cos\sqrt{\frac{2g}{\ell}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{2g}{\ell}}t\,. \tag{12}$$

Проінтегруємо перше рівняння з (10):

$$\dot{x} = -0.5 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} + C_3,$$

$$x = -0.5 \cdot \ell \cdot \varphi + C_3 \cdot t + C_4.$$

Отже

$$\begin{cases} x = -0.5 \cdot \ell \cdot C_1 \cdot \cos\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t - 0.5 \cdot \ell \cdot C_2 \cdot \sin\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t + C_3 \cdot t + C_4, \\ \varphi = C_1 \cdot \cos\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t + C_2 \cdot \sin\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t. \end{cases} \tag{13}$$

Визначимо сталі інтегрування з початкових умов:

при $t = 0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0.$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.5 \cdot \ell \cdot \cos\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot \sin\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t - 0.5 \cdot \ell \cdot \sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot \cos\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t + C_3, \\ \dot{\varphi} = -C_1 \cdot \sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot \sin\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t + C_2 \cdot \sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot \cos \cdot \sqrt{\dfrac{2g}{\ell}} \cdot t. \end{cases} \tag{14}$$

Підставимо початкові умови в (13) і (14), одержимо:

$$\begin{cases} x_0 = -0.5l\,C_1 + C_4, \quad \varphi_0 = C_1, \\ 0 = -0.5l\sqrt{\dfrac{2g}{l}} + C_3, \\ 0 = C_2\sqrt{\dfrac{2g}{\ell}}. \end{cases}$$

Отже

$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0.5l\sqrt{\frac{2g}{l}}, \quad C_4 = x_0 + 0.5l\,\varphi_0 .$$

Закон руху механічної системи:

$$\begin{cases} x = -0.5l\,\varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t + 0.5l\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t + x_0 + 0.5l\varphi_0, \\ \varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = -0.5l\,\varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t + 0.5l\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t + x_0 + 0.5l\varphi_0, \\ \varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t. \end{cases}$

10. УДАР

Удар – це процес, при якому протягом дуже малого проміжку часу діють дуже великі сили, причому переміщення матеріальної точки або переміщення точок твердого тіла за цей проміжок часу будуть надто малими (ними надалі знехтуємо).

Хоча ці сили і діють протягом дуже малого проміжку часу, проте їх імпульс і викликана силами зміна швидкостей точок тіла будуть скінченими. Ці сили називаються миттєвими або ударними. Удар називається центральним, якщо центри мас двох твердих тіл, які рухаються поступально, розміщуються на одній прямій (лінія удару) і загальна нормаль в точці дотику цих тіл лежить на тій самій прямій.

Якщо швидкості співударних тіл напрямлені по лінії удару, то удар називають прямим, в протилежному випадку – косим. Пружним називається такий удар, при якому співударні тіла мають після удару різні швидкості.

При пластичному ударі співударні тіла рухаються після удару як одне тіло.

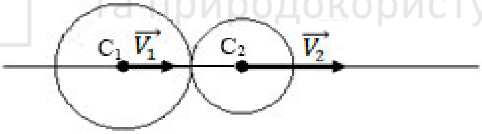


Рис.10.1

Типи задач:

1. Прямий центральний удар двох куль (рис. 10.1).

Швидкості після удару $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$ Закон збереження кількості руху:

$$m_2 U_1 + m_2 U_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 . \qquad (10.1)$$

Коефіцієнт відновлення:

$$K = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2} , \qquad (10.2)$$

де V_1 і V_2 – швидкості до удару; імпульс миттєвих сил S визначається для одного із співударяючих тіл за формулою:

$$S = m_2 \cdot (U_2 - V_2). \qquad (10.3)$$

Втрата кінетичної енергії:

$$\Delta T = -\frac{1-K}{1+K} \cdot \frac{1}{2}\left(m_1 (U_1 - V_1)^2 + m_2 (U_2 - V_2)^2\right), \qquad (10.4)$$

де $U_1 - V_1$ і $U_2 - V_2$ втрачені швидкості.

Якщо пружний удар, то $K = 1$, у випадку непружного удару $K = 0$.

2. Косий удар двох куль (рис. 10.2).

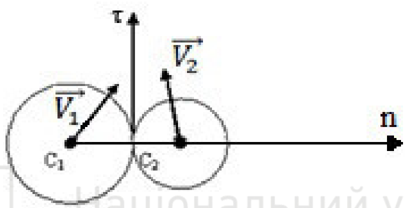


Рис. 10.2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Закон збереження кількості руху:

$$\begin{cases} m_1 U_{1\tau} + m_2 U_{2\tau} = m_1 V_{1\tau} + m_2 V_{2\tau}, \\ m_1 U_{1n} + m_2 U_{2n} = m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n}, \end{cases} \qquad (10.5)$$

де: $U_{1r} = V_{1r}, U_{2r} = V_{2r}$.

Коефіцієнт відновлення:

$$K = \frac{U_{2n} - V_{1n}}{V_{1n} - V_{2n}}. \qquad (10.6)$$

3. Удар по тілу, яке обертається (рис. 10.3).

Нехай тіло обертається навколо осі *Az*. В деякий момент часу до тіла прикладений ударний імпульс $\vec{S}$. Маса тіла *M*.

Теорема про зміну кінетичного моменту за час удару:

$$L_{1Z} - L_{0Z} = m_Z\left(\vec{S}\right). \qquad (10.7)$$

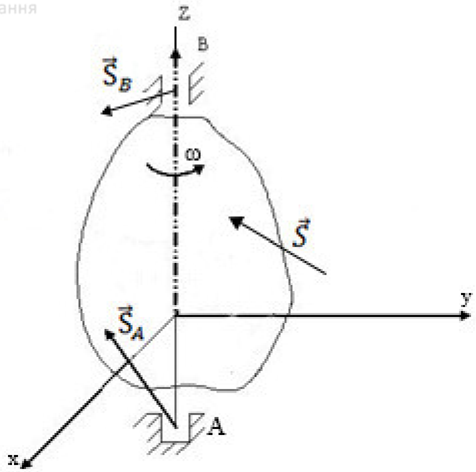


Рис. 10.3

Кутова швидкість тіла за час удару:

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{m_Z\left(\vec{S}\right)}{I_Z}, \tag{10.8}$$

де I_Z – момент інерції тіла; ω_0 – початкова кутова швидкість тіла.

Оскільки моменти відносно осі z імпульсних реакцій $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, які виникають в підп'ятнику, рівні нулю, то

$$I_z(\omega_1 - \omega_0) = m_z(\vec{S}). \tag{10.9}$$

Отже

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{m_z(\vec{S})}{I_z}. \tag{10.10}$$

Кутова швидкість тіла за час удару змінюється на величину, яка дорівнює відношенню момента ударного імпульса до момента інерції тіла відносно осі обертання.

10.1. Питання для самопідготовки

1. Яке механічне явище називається ударом?
2. Який удар називається прямим центральним ударом?

3. Який удар називається косим?

4. Запишіть закон збереження кількості руху при прямому центральному ударі.

5. Запишіть закон збереження кількості руху при косому ударі?

6. Запишіть формулу для визначення коефіцієнта відновлення.

7. Запишіть формулу для визначення втрати кінетичної енергії у випадку:

а) пружного удару;

б) непружного удару.

10.2. Порядок розв'язування задач на визначення швидкостей тіл

1. Напрямляємо вісь n вздовж лінії центрів, вісь τ – перпендикулярно до неї (рис. 10.1).

2. Визначаємо проекції на осі n і τ швидкостей $V_{1n}, V_{1\tau}, V_{2n}, V_{2\tau}$ тіл, які ударяються на початку удару.

3. Визначаємо проекцію загальної швидкості U_n тіл на вісь n в кінці абсолютно непружного удару за формулою:

$$U_n = \frac{m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

4. Визначаємо проекції швидкостей $U_{1n}, U_{2n}, U_{1\tau}, U_{2\tau}$ тіл на осі n і τ в кінці удару за формулами:

$$U_{1\tau} = V_{1\tau}, U_{2\tau} = V_{2\tau}, U_{1n} = U_n + K(U_n - V_{1n}), U_{2n} = U_n + K(U_n - V_{2n}).$$

5. Визначаємо модулі швидкостей тіл в кінці удару:

$$U_1 = \sqrt{U_{1\tau}^2 + U_{1n}^2};\ U_2 = \sqrt{U_{2\tau}^2 + U_{2n}^2}.$$

Напрямок швидкостей:

$$tg\beta_1 = \frac{U_{1\tau}}{U_{1n}},\ tg\beta_2 = \frac{U_{2\tau}}{U_{2n}}.$$

У випадку удару тіла в нерухому площину вважаємо масу нерухомої площини нескінченно великою, а швидкість до удару рівною нулю $(m_2 = \infty, V_2 = 0)$. У випадку прямого центрального удару проекції швидкостей на τ дорівнює нулю.

10.3. Приклади розв'язування задач

***Задача* 1.** Швидкості до удару двох куль рівні: $V_1 = 6 м/с$, $V_2 = 2 м/с$. Маси куль $m_1 = 4кг, m_2 = 3кг$. Визначити швидкості куль після удару U_1, U_2, якщо кулі рухаються в одному напрямку. Коефіцієнт відновлення К=0,8 (рис. 10.4).

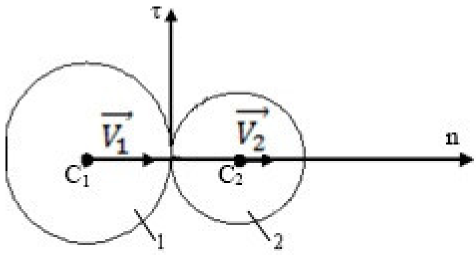


Рис. 10.4

Розв'язання

В даному випадку маємо прямий центральний удар двох куль:

$$K = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2};$$

$$0.8 = \frac{U_2 - U_1}{4}.$$

Тоді $$U_2 - U_1 = 3.2\,. \qquad (1)$$

Закон збереження кількості руху:

$$\begin{gathered} m_1 U_1 + m_2 U_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2, \\ 4U_1 + 3U_2 = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 30. \end{gathered} \qquad (2)$$

Розв'язавши систему рівнянь (1) і (2) визначимо U_1 і U_2:

$$U_2 = 3.2 + U_1, \ 4U_1 + 3 \cdot (3.2 + U_1) = 30,$$

$$U_1 = \frac{30 - 9.6}{7} = \frac{102}{35} = 2{,}91 \frac{м}{с},$$

$$U_2 = 3.2 + \frac{102}{35} = \frac{214}{35} = 6{,}11 \frac{м}{с}.$$

Відповідь: $U_1 = 2{,}91\dfrac{м}{с};\ \ U_2 = 6{,}11\dfrac{м}{с}.$

<u>Задача 2.</u> Дві абсолютно пружні кулі з одинаковими масами $m_1 = m_2 = 10кг$, рухаючись поступально з однаковими по модулю швидкостями $V_1 = V_2 = V = 6\sqrt{2}м/с$, ударяються (рис. 10.5). Визначити швидкості куль після удару, якщо $\alpha = 45°$.

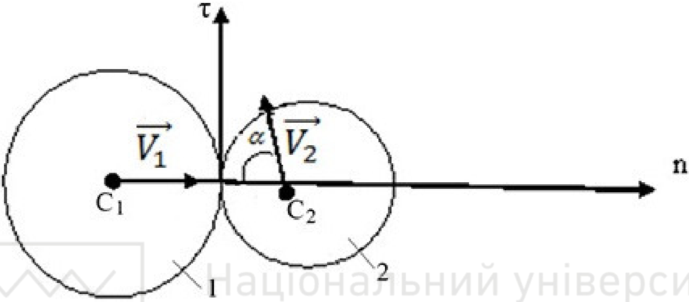


Рис. 10.5

Розв'язання

В данному випадку маємо косий удар. Удар абсолютно пружний, то $K = 1$. Визначимо проекції швидкостей куль до удару:

$$V_{1\tau} = 0; V_{2\tau} = V\sin\alpha;$$
$$V_{1n} = V; V_{2n} = -V\cos\alpha.$$

Після удару куль проекції швидкостей будуть:

$$U_{1n}, U_{2n}, U_{1\tau}, U_{2\tau}.$$

Закон збереження кількості руху в проекціях на осі n і τ:

$$m_1V_{1\tau} + m_2V_{2\tau} = m_1U_{1\tau} + m_2V_{2\tau};$$
$$m_1V_{1n} + m_2V_{2n} = m_1U_{1n} + m_2V_{2n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} V\sin\alpha &= U_{1\tau} + U_{2\tau}, \\ V - V\cos\alpha &= U_{1n} + U_{2n}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Оскільки удар абсолютно пружний, то:

$$
\begin{aligned}
&U_{1\tau}=V_{1\tau}, U_{2\tau}=V_{2\tau};\\
&U_{1\tau}=0, U_{2\tau}=V\sin\alpha,\\
&K=1=\frac{U_{2n}-U_{1n}}{V_{1n}-V_{2n}}=\frac{U_{2n}-U_{1n}}{V-V\cos\alpha},\\
&U_{2n}-U_{1n}=V(1-\cos\alpha).
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Розв’язуючи систему рівнянь (1) і (2), одержимо:

$$U_{1\tau}=-V\cos\alpha=-6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-6\, м/с,$$

$$U_{2n}=V=6\sqrt{2}\, м/с.$$

<u>Задача 3.</u> Кулька масою $P_1=2H$ падає з висоти $h_1=1м$ на нерухому плиту вагою $P_2=20H$ (рис. 10.6) і відскакує на висоту $h_2=0.25м.$ Обчислити втрату кінетичної енергії при ударі.

Розв’язання

Втрата кінетичної енергії обчислюється за формулою:

$$T_1-T_2=(1-K^2)\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}V_1^2. \qquad (1)$$

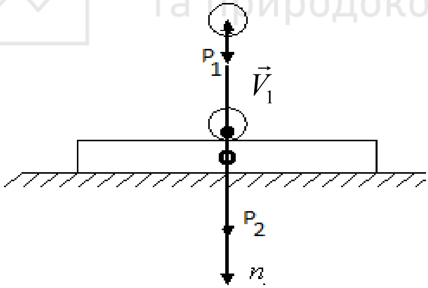


Рис. 10.6

Для визначення коефіцієнта відновлення K визначимо швидкість кульки U_1:

$$U_{1n}=U_n+K\cdot(U_n-V_{1n}). \qquad (2)$$

Визначимо U_n за формулою:

$$U_n=\frac{m_1V_{1n}+m_2V_{2n}}{m_1+m_2}.$$

Оскільки $V_{2n} = 0$, то: $U_n = \dfrac{m_1 V_{1n}}{m_1 + m_2}$. (3)

Підставивши (3) в (2), одержимо:

$$U_{1n} = \frac{m_1 + km_2}{m_1 + m_2} \cdot V_{1n}. \qquad (4)$$

З (4) визначимо *K*: $K = \dfrac{m_1}{m_2} - \dfrac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \dfrac{U_{1n}}{V_{1n}}$. (5)

Оскільки кулька здійснює вільне падіння, то:

$$\begin{cases} V_{1n} = V_1 = \sqrt{2gh_1}; \\ U_{1n} = U_1 = \sqrt{2gh_2}. \end{cases} \qquad (6)$$

Підставивши (6) в (5), одержимо:

$$K = \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \frac{P_1}{P_2} + \frac{P_1 + P_2}{P_2} \cdot \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \qquad (7)$$

Підставивши (7) в (1), одержимо:

$$T_1 - T_2 = \left(1 - K^2\right) \frac{P_1 \cdot P_2}{P_1 + P_2} h_1 .$$

Використовуючи числові значення, отримуємо:

$$T_1 - T_2 = 10.5 H \cdot м.$$

Відповідь: $T_1 - T_2 = 10.5 H \cdot м.$

10.3.1 Розв'язування задач на застосування теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи

1. Зображаємо на рисунку зовнішні ударні імпульси.
2. Обчислюємо суму моментів ударних імпульсів (тобто імпульсів всіх зовнішніх миттєвих сил) відносно осі обертання *z*.
3. Підставивши суму моментів ударних імпульсів в рівняння

$$I_z(\omega_{2z}-\omega_{1z})=\sum_{k=1}^{n} m_z\left(S\left(\vec{F}_k^e\right)\right),$$ визначаємо невідому величину.

<u>Задача 4.</u> Тягар вагою P_1, рухаючись вправо по горизонтальній площині (рис. 10.7), в момент удару з ідеальним стержнем *OA* вагою P_2 і довжиною ℓ, має швидкість V. Визначити кутову швидкість в кінці удару, а також ударний імпульс. Удар вважати абсолютно непружним.

Рис. 10.7

Розв'язання

Запишемо теорему про зміну кількості руху тягарця:

$$\frac{P_1}{g}V_1-\frac{P_1}{g}V=-S, \qquad (1)$$

де V_1 – швидкість тягарця в кінці абсолютно непружного удару.

Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту однорідного стержня:

$$I_{z_1}-L_{z_0}=\sum_{k=1}^{n} m_O\left(\vec{S}\left(\vec{F}_k^e\right)\right).$$

У даному випадку:

$$I_{z_1} = I_{z_0}\omega_1,\ L_{z_0} = I_{z_0}\omega_0,\ \omega_0 = 0,$$

тоді $I_0 \cdot \omega = S' \cdot \ell$.

Оскільки $I_0 = \dfrac{P_2\ell^2}{3g}$ і $V_1 = \ell \cdot \omega_1$ і $\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{S}'\right|$, то:

$$\omega_1 = \frac{3P_1V}{(3P_1 + P_2)l},\ S = \frac{P_1P_2}{g(3P_1 + P_2)}V\ .$$

Відповідь: $\omega_1 = \dfrac{3P_1V}{(3P_1 + P_2)l},\ S = \dfrac{P_1P_2}{g(3P_1 + P_2)}V$.

<u>Задача 5.</u> Куля масою m_1 попадає в центр ваги C нерухомої квадратної мішені масою m_2 із швидкістю V_1, яка напрямлена перпендикулярно до мішені. Мішень може обертатися навколо осі Az (рис. 10.8). Визначити величини реактивних ударних імпульсів в підп'ятнику і підшипнику, вважаючи удар абсолютно непружним, якщо: $OA = OB = a$, $OC = CD = a/2$. Мішень вважати однорідним диском.

Розв'язання

Вибираємо нерухому систему координат, яка зв'язана з мішенню. Напрямляємо ударний імпульс $\vec{S}$ і складові реактивні ударні імпульси: $\vec{S}_{Ax}$, $\vec{S}_{Ay}$, $\vec{S}_{Az}$, $\vec{S}_{Bx}$, $\vec{S}_{By}$. До кулі прикладений ударний імпульс з боку мішені $\vec{S}'$, причому $\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{S}'\right|$.

Запишемо теорему про зміну кількості руху для кулі:

$$m_1V_2 - m_1V_1 = -S', \tag{1}$$

V_1 – швидкість кулі до удару;

V_2 – швидкість кулі в кінці удару.

Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту для мішені:

$$I_z(\omega_2 - \omega_1) = S\frac{a}{2}\ .$$

В початковий момент часу $\omega_1 = 0$.

Для мішені $I_z = \dfrac{m_2a^2}{3}$.

Тоді $\dfrac{m_2 a^2}{3}\omega_2 = S\dfrac{a}{2}$.

Отже
$$\frac{m_2 a \omega_2}{3} = \frac{S}{2}. \tag{2}$$

Враховуючи, що: $V_2 = \dfrac{\omega_2 a}{2} = \dfrac{3S}{4m_2}$, розв'яжемо систему рівнянь (1) і (2):

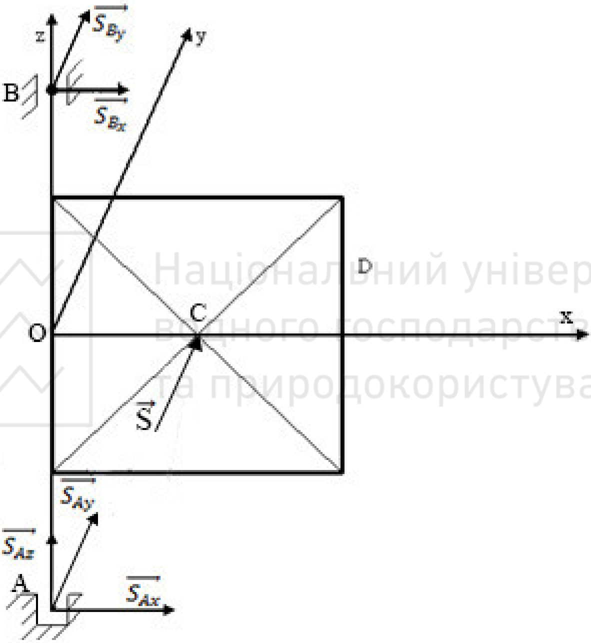


Рис. 10.8

Тоді
$$\begin{cases} S = \dfrac{4m_1 m_2 V_1}{4m_2 + 3m_1}, \\ V_2 = \dfrac{3m_1 V_1}{4m_2 + 3m_1}. \end{cases} \tag{3}$$

Складемо систему рівнянь використавши теорему про зміну кількості руху і кінетичного моменту в проекціях на нерухомі осі:

$$\begin{cases} S_{Ax} + S_{Bx} = 0, \\ S_{Ay} + S_{By} = m_2 x_C (\omega_2 - \omega_1) - S, \\ S_{Az} = 0, \\ S_{Ay} a - S_{By} a = -I_{xz} (\omega_2 - \omega_1), \\ -S_{Ax} a + S_{Bx} a = -I_{yz} (\omega_2 - \omega_1). \end{cases}$$

Оскільки $\omega_1 = 0$, $I_{yz} = 0$, $I_{xz} = 0$, $x_C = a/2$, то:

$$\begin{cases} S_{Ax} + S_{Bx} = 0, \\ S_{Ay} + S_{By} = m_2 \dfrac{a}{2} \omega_2 - \dfrac{4 m_1 m_2 V_1}{4 m_2 + 3 m_1} = -\dfrac{m_1 m_2 V}{4 m_2 + 3 m_1}, \\ S_{Az} = 0, \\ S_{Ay} - S_{By} = 0, \\ -S_{Ax} + S_{Bx} = 0. \end{cases}$$

Розв’язавши систему рівнянь, одержимо:

$$S_{Ax} = S_{Bx} = S_{Az} = 0,$$

$$S_{Ay} = S_{By} = -\frac{m_1 m_2 V_1}{2 (m_2 + 3 m_1)}.$$

Відповідь: $S_{Ax} = S_{Bx} = S_{Az} = 0$, $S_{Ay} = S_{By} = -\dfrac{m_1 m_2 V_1}{2 (m_2 + 3 m_1)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1). Цасюк В. В. Теоретична механіка: Навчальний посібник. – Київ : Центр навчальної літератури, 2004. – 402 с.

2). Короткий довідник з теоретичної механіки: Навч. посіб. / І. П. Смерека, А. Ф. Барвінський, Б. Д. Білоус, та інші – Львів : Інтелект-Захід, 2001. – 240 с.

3). Айзенберг Т. Б. Руководство к решению задач по теоретической механике: 6-е изд. – Москва : Высшая шк., 1968. – 415 с.

4). Апостолюк О. С., Воробйов В. М., Ільшинина Д. І., та ін. Теоретична механіка. Збірник задач: Навч. посіб./ За ред. М. А. Павловського. – Київ : Техніка, 2007. – 400 с.

5). Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3-х т. Т. 1. Статика и кинематика: Учеб. пособие/ М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1990. – 672 с.

6). Мещерський И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учебн. пособие/ Под ред. Н. В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. – 36-е изд. испр. – Москва : Наука, 1986. – 447 с.

7). Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М. : Высшая школа, 1998. – 416 с., ил.

8). Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – 2-е вид., стереотип. – Київ : Техніка, 2004. – 512 с.

9). Теоретична механіка. Динаміка : [навч. посіб. для вищ. техн. навч. закл. III-IV рівнів акредитації]. Кн.1 / І. В. Кузьо, Т. М. Ванькович, Я. А. Зінько. – Л. : Растр-7, 2012. – 444 с. : іл.

10). Теоретична механіка. Динаміка : [навч. посіб. для вищ. техн. навч. закл. III-IV рівнів акредитації]. Кн. 2 / І. В. Кузьо, Т. М. Ванькович, Я. А. Зінько. – Л. : Растр-7, 2012. – 338 с. : іл.

11). Практикум з теоретичної механіки. Статика, кінематика (навчальний посібник). / Г. А. Багнюк, М. Р. Галанзовська, В. В. Наконечний, Л. С. Серілко. – Рівне : НУВГП, 2014. – 162 с.

12). Завдання до самостійної роботи з теоретичної механіки (розділ «Динаміка») студентам денної форми навчання за напрямами: 6.070106 «Автомобільний транспорт», 6.050503 «Машинобудування», 6.050301 «Гірництво». / Войтович Л. В., Серілко Л. С., Щурик В. О. – Рівне : НУВГП, 2016. – 25 с.